Путенихин Петр Васильевич

Логика противоречий

г.Саратов,
Типография "АМИРИТ"
2017 год

ББК 22.313ф, 22.314ф, 22.62ф, 22.12ф, 22.151.1ф
УДК 530.12, 530.16, 530.145.1, 521.1, 510.22, 514.12.01

Путенихин П.В.
П90 Логика противоречий. – Саратов: «АМИРИТ», 2017. – 133 с., илл.
ISBN 978-5-6040143-7-0

Рассмотрены логические противоречия интерпретации некоторых явлений теории относительности (сингулярность, Черные дыры, парадокс Эренфеста, тахионы), космологии (ускоренное расширение Вселенной), квантовой механики (нелокальность, квантовая телепортация) и математики бесконечностей (равномощность и счетность множеств, отождествление). В частности, подвергнуты критике некоторые методы Кантора при работе с бесконечностями. Предложено решение проблемы 5-го постулата Евклида.

Книга ориентирована на читателя, интересующегося вопросами теории относительности, космологии, квантовой механики, математики, геометрии и имеющего некоторые представления об этих областях знаний.

putenikhin.peter@gmail.com
peter.putenikhin@mail.ru

ISBN978-5-6040143-7-0

Предисловие

Главным инструментом в процессе познания, в процессе научных исследований, несомненно, является формальная логика. Результаты экспериментов, наблюдения, факты – это не более чем набор образов, текстов, которые без дальнейшей логической обработки не имеют никакого смысла. Только логика, логический анализ позволяет оживить эти сведения. Однако логику как инструмент можно использовать неверно. Подмены понятий, игнорирование важных связей быстро ведут к ошибкам, парадоксам и противоречиям. Но парадоксы, противоречия и даже абсурды – это для научного метода лишь повод для исследования, но никак не рабочий инструмент, включаемый в формализм теорий.

Тем не менее, некоторые из рассматриваемых далее научных выводов, интерпретаций, наблюдаемых экспериментально или рожденных в размышлениях, вызывают серьезное недоверие, скепсис. Предвзятый логический анализ или подход с позиции здравого смысла выявляет в них совершенно неприемлемые элементы.

Впрочем, упреки в адрес здравого смысла стали почти штампом и едва ли не правилом хорошего тона. Однако напомним: "Не отвергай здравого смысла, иначе он тебя покинет". Именно здравый смысл настойчиво рекомендует использовать логику и научный метод, каковым является признанный философией метод проб и ошибок.

Одним из источников отклонений от пути к достоверным выводам может быть игнорирование философских законов, особенно закона детерминизма. Ряд ведущих физиков прошлого и современности относятся к философии, по меньшей мере, скептически. Отклонение от философского детерминизма лежит, например, в основе таких физических интерпретаций, как тахионная механика, нелокальность.

Немного о логике

Вводимые учеными новые термины, понятия сами по себе не имеют каких-либо противоречий, вполне допустимы и, в общем-то, неизбежны. Однако при их использовании, трактовках и интерпретациях нередко возникают неясности, двусмысленности, проблемы. Пожалуй, одним из наиболее известных примеров является темная материя. Лишь на первый, поверхностный взгляд гипотеза объясняет некоторые странности, обнаруженные в астрономических наблюдениях. Движение космических объектов в скоплениях и звёзд в галактиках невозможно описать с помощью существующих физических теорий и сведений об этих скоплениях. Но гипотеза создала новую проблему – с наблюдаемыми кривыми вращения галактики не могут быть стабильными.

Такие примеры не единичны. В их основе лежит нечто общее – фактическая подмена формальной логики логикой модифицированной. Основой человеческого знания вообще является философия, главным инструментом которой и является формальная логика. И хотя некоторые именитые физики и заявляют, что "философия мертва", именно философия, любовь к мудрости автоматически обязывает каждого исследователя быть логиком. Как бы ни отвергали мыслители философию, они не могут «не мыслить» и вряд ли кто-нибудь из них отвергает мудрость. Логика лежит в основе любой мыслительной деятельности. Даже случаи иррациональные – интуиция, пророчества, инстинкты – подвергаются, в конечном счете, логической обработке.

Однако логика, как и любой другой инструмент, тоже может использоваться неправильно и даже во вред. Пытливый ум исследователя постоянно стремится улучшить, повысить эффективность своих инструментов, как механических, так и интеллектуальных. Поэтому не удивительно, что и сам инструмент логика постоянно подвергается разным «улучшениям». Берём это слово в кавычки, подразумевая, в том числе, и такие улучшения, которые следовало бы назвать… нелогичными.

Такие развития, модификации логики являются весьма сомнительными достижениями, хотя и преподносятся как строгие научные построения. Элементарная логика, применённая к этим «логикам следующего поколения», приводит к довольно странным, порой нелепым выводам.

Возьмём, хотя бы, известный Аристотелевский закон исключенного третьего: либо А, либо не-А, третьего не дано. Это в классической формальной логике. Однако её формализм можно попробовать расширить. Почему бы не ввести правило исключенного четвертого?

Казалось бы, достаточно логично и звучит это примерно так: либо «А», либо «не-А», либо не «А» и не «не-А». То есть, одно из трёх, четвертого не дано. Этот закон трехзначной логики был впоследствии материализован в вычислительной технике. Действительно, вся компьютерная техника основывается на логических (!) элементах. Главным свойством их является то, что они выдают и принимают только бинарные сигналы – 0 и 1. На основе этих элементов и построены все цифровые вычислительные системы. Как в любой системе счисления каждому разряду числа отводится отдельное место, например, 0101 или 2536 в шестнадцатиричном коде. Закон исключенного третьего отражает в понятиях информатики одноразрядное число. В этом единственном разряде может быть либо 1 (А), либо 0 (не-А). Третьего не дано, это третье вписать просто некуда.

Но если принять за основу три логических значения, то предположительно возникает закон исключенного четвертого. Для трехзначной логики в информатике нашлось вполне даже «материальное» воплощение – это так называемое z-состояние, третье состояние на выходе элемента, неопределенность. Это довольно интересное свойство логического элемента, существенно упрощающее их использование. Конечно, следует уточнить, что на самом деле z-состояние является не логической характеристикой элемента, а всего лишь простым его выключением из логической цепочки. Для корректной работы схемы в данной точке обязательно будет присутствовать конкретное логическое значение – ноль или единица.

Лучшего доказательства обоснованности "включенного" третьего и не требуется. Однако будем предельно последовательны. Поскольку мы рассматриваем «материальный» компьютерный элемент, имеющий математическую аналогию, то следует признать, что здесь вводится новый, дополнительный разряд «логического числа», значности логики. Следует ожидать, что общее число состояний должно быть так же бинарным, то есть, их должно быть в данном случае не 3, а 4. Легко догадаться, что это следующие состояния:

00 – А
01 – не-А
10 – не А и не не-А
11 – А и не-А

В этом случае мы последнее состояние и можем назвать тем самым исключенным четвертым. Только в этом случае мы имеем все возможные комбинации, которым даже можно дать определения:

- тезис
- антитезис
- неопределенность
- абсурд, исключенное четвертое, повреждение.

Никаких других комбинаций из использованных значений мы получить не можем. И это вполне закономерно, поскольку смысл значности логики здесь состоит лишь в числе бит, используемых для «законов исключенного n-ного». Действительно, закон исключенного третьего описывает одноразрядное двоичное число. В один разряд мы можем поместить только один бит. Это либо 0, либо 1. Отсюда и возникает исключение. Однако, добавив это невозможное условие, мы почему-то не рассматриваем и его отрицание. Правильнее было бы говорить: закон исключенных третьего и четвертого, то есть (не А и не не-А) и (А и не-А).

Мы говорим о законе исключенного четвертого, потому что физически реализован закон теперь уже разрешенного третьего, и считаем невозможным четвертое добавленное, а фактически просто восстановленное условие. С точки зрения информатики мы просто обязаны рассмотреть обе эти противоположности. В материальном, электронном варианте этот закон исключенного четвертого прямо означает неисправность логического элемента. В соответствии с особенностями этих элементов принимается, что значение логических 0 и 1 соответствует некоторому напряжению на его выходе. Как следствие, возникает зона неопределенности, когда логика уже не может выяснить точное логическое значение. В случае объединения нескольких выходов элементов в этой точке происходит логический разрыв: ни один элемент теперь уже не может сформировать свой сигнал.

Из полного набора состояний следует отсутствие других вариантов, то есть, их только четыре. Действительно: либо один из двух, либо ни одного, либо оба, пятое исключено, а это уже закон исключенного пятого!

Конечно, можно возразить, что закон исключенного четвертого, все-таки, имеет какое-никакое материальное воплощение в технике (z-состояние), то есть, имеет признаки полноты. Третий элемент закона исключенного четвертого отражает негласное удаление элемента из процесса вычислений, специфическая реализация элемента ИЛИ, на самом деле в этой точке цепи всегда присутствует конкретное логическое значение. Введение состояния "поломка элемента" приводит к закону исключенного пятого.

А можно ли найти такие же примеры для исключенного пятого? Оказывается, по меньшей мере, один пример можно отнести к этому закону. Обычно о квантовых частицах, квантах говорят мягко – они обладают свойствами как частицы, так и волны. Но поставим вопрос ребром, всё-таки кванты – это корпускулы (частицы) или волны? В отдельных опытах их можно определенно считать частицами (фотоэффект, например). То есть, фотон в этих опытах определенно частица. Но в опытах по интерференции поведение фотона можно рационально, без явной мистики описать, только признав его волной. В электротехнике фотон и родственные ему электромагнитные излучения безупречно описываются уравнениями Максвелла как волновые процессы. То есть, фотон – это волна. И мы имеет четыре пункта классификации:

00 – частица (тезис);

01 – волна (антитезис);

10 – и частица и волна (неопределенность);

11 – и не волна и не частица (не абсурд ли?).

Значение 10 соответствует господствующему ныне корпускулярно-волновому представлению, поэтому значение 11 следовало бы отнести к исключенному четвертому. Однако, напротив, это значение на общем фоне выглядит все-таки явно более реалистично. Другими словами, более разумным и полным выглядит утверждение, что корпускулярно-волновой дуализма фактически провозглашает, что кванты – это и не частица и не волна. Выходит, что как допустимые в определенной степени можно рассматривать все четыре варианта. А это уже закон исключенного пятого.

Несложно догадаться, что в общем случае нет никаких логических пределов для формирования множества других «законов исключенного n-ного». Тем не менее, все эти расширения логики – скорее математические упражнения на грани абсурда, нелепости.

А какой еще может быть трактовка закона исключенного пятого? В математическом смысле поведение такого "без пятого" элемента не содержит никаких противоречий. А как бы выглядела его материальная реализация?

Здесь, видимо, уместно вспомнить о знаменитой гёделевской теореме о полноте. В двух словах: первая теорема утверждает, что если формальная арифметика непротиворечива, то в ней существует истинное невыводимое и неопровержимое высказывание. Другими словами: некоторое утверждение верно, но недоказуемо. В описании работы Гёделя можно встретить один такой яркий пример «недоказуемой верности». Возможно, этот вариант формулы вообще может быть единственным. Известна она как «парадокс лжеца» и формулируется как фраза некоего человека: «я лгу».

Если говорящий - лжец, то и эта фраза тоже ложь. Получается, что в этом случае лжец говорит правду. Но это противоречит исходному утверждению, то есть, получен парадокс. Однако присмотримся к процедуре возникновения парадокса. Сам факт высказывания "я лгу" не является противоречием. Некто произносит эту фразу – всё вполне корректно. Возникновение парадокса связано с последующей необязательной трактовкой, то есть, мы производим повторный анализ. Изначально лжец излагает некоторое внутреннее знание, мысль. Сама по себе она является истиной вследствие своей определенности, законченности: фраза она и есть фраза. Но в процессе её произношения лжец её "инвертирует" в соответствие со своим статусом: истину превращает в ложь. Анализируя высказывание, мы его фактически возвращаем лжецу и вновь ожидаем от него ответа. Именно так следует трактовать формулу "если лжец, то и это ложь". Формально аналитическая фраза "если лжец" и означает повторное высказывание. Цикл замкнулся: высказывание возвращено "в голову лжеца", став при этом истиной, которую лжец должен исказить.

Для большей определенности и наглядности проделаем несколько таких циклов. Итак, у нас есть высказывание "я лгу". Если оно находится в состоянии Истина, то лжец говорит правду и находится в состоянии правдолюба. Но фраза от этого не изменилась – "я лгу". Изменилось её "состояние" – теперь это Ложь. Применив к ней значение Истина, мы получили её новое состояние – Ложь. Сам лжец теперь и на самом деле – лжец. Но, если состоянием тезиса "я лгу" является Ложь, то тезис сразу же вновь меняет свое состояние на Истину, а лжец изменяет своё состояние с лжеца на честного, правдолюба, не-лжеца. При этом с самой фразой "я лгу", как и раньше, ничего не произошло – она всё та же, например, высеченная на каменной плите или заснятая на киноленту.

Рассмотренную последовательность действий можно продолжать бесконечно, и всегда будет изменяться только *состояние* этой фразы, заключающееся в том, что на каждом этапе анализе фраза выдает нам инверсное значение лжеца и истинности фразы. Сделаем своеобразную замену переменных, как это принято в математике. Будем считать саму фразу неким "черным ящиком". Если мы опускает в этот ящик значения "лжец" и "ложь", то вынимаем из него уже "правдивый" и "истина". И, напротив, опуская в него эти значения "правдивый" и "истина", вынимаем из него "лжец" и "ложь".

Рассмотренная замена переменной имеет непосредственное воплощение в вычислительной технике и информатике. В роли лжеца там выступает логический элемент-инвертор НЕ. На входе у него "правда", а на выходе всегда противоположность, то есть, ложь. По определению Лжец всегда говорит НЕ-правду. Поэтому тождественный ему логический элемент Лжец и назван инвертором. Любую входную информацию он выдаёт в противоположном виде, инверсном, ложном.

Такой элемент имеет конкретное материальное воплощение в вычислительной технике и является одним из её базовых элементов. Ту последовательность операций, которую мы проделали с Лжецом, мы можем проделать и с элементом НЕ, соединив его выход с его же входом, добавив лишь небольшую деталь – элемент задержки, поскольку и Лжец должен некоторое время подумать, и нам нужно исследовать его состояние.

И что мы при этом получаем? Названия разные: осциллятор, генератор. Что на выходе у этого «зацикленного» элемента? На выходе у него «и 0 и 1» или «и А и не-А», то есть последний элемент закона исключенного пятого.

Итак, мы, казалось бы, показали обоснованность существования так называемой трехзначной логики с законом исключенного четвертого, которая фактически является завуалированной четырехзначной логикой с законом исключенного пятого. То есть, помимо классической формальной логики могут, вроде бы, существовать и «параллельные», расширенные логики.

Однако это все-таки подмена понятий. Любая «расширенная» логика опирается и не может не опираться на логику классическую, формальную, двухзначную. Только эта логика может дать гарантированно верный ответ. Поэтому любая модифицированная, урезанная логика в определённых условиях неизбежно приведёт к ошибочным выводам.

Головокружительные успехи экспериментальных областей наук дали обильную пищу для множества новых теоретических построений. Новые факты вступают в существенные противоречия с накопленными теоретическими представлениями. Более того, некоторые трактовки экспериментальных данных самым очевидным образом не стыкуются друг с другом. В результате рождаются монстры вроде корпускулярно-волнового дуализма.

Кандидат на звание Теории Всего – теория суперструн или М-теория – столкнулась с тем, что помимо гравитона «нечаянно» предсказала сверхсветовую частицу. Теоретики взялись за проблему и изгнали «духа» из своей теории, подкорректировав её соответствующим образом. А иначе одна из основополагающих, фундаментальных теорий – теория относительности – вступала с нею в противоречие. Только следовало ли так торопиться? Давно известно явление нелокальности. Конечно, в этом явлении не удалось «поймать» сверхсветового носителя так называемой квантовой информации, что на первых порах «спасало» специальную теорию относительности. Однако многие учёные всё-таки вынужденно соглашаются, что все равно квантовая теория в описании этого явления вступает в противоречие с теорией относительности. Для устранения противоречия создаются научно-фантастические гипотезы, которые правильнее было бы назвать просто фантастическими, без приставки «научные». Главное для таких гипотез – нужно избегать серьезного, скрупулезного логического анализа.

Наука против религии

Никакая радикальная атеистическая научная философия, особенно диалектический материализм не отвергает и в принципе не может отвергнуть божественного происхождения Мира, поскольку это запрещает её собственный Основной Закон Философии. Наука опирается на слепую, догматическую веру ровно в той же мере, что и религия.

И тем не менее в научной среде и в теософии, религии предпринимались и, видимо, всегда будут предприниматься попытки чисто логически доказать с одной стороны – ненужность понятия бога, а с другой – неизбежность признания его существования. Но эти попытки, строго говоря, не имеют под собой веских логических оснований. Нет и быть не может доказательств единственности выбранной первоосновы. Два понятия: Создатель и Материя сами по себе не имеют никакого логического преимущества в предшествовании друг другу, поскольку они принципиально могут быть причиной, основой друг друга. Можно сказать, что это две стороны одной медали. Другими словами, эти два понятия, объекта непротиворечиво могут быть источником друг друга.

Вместе с тем, такая взаимозависимость, тем не менее, всё-таки накладывает на них некоторые дополнительные, ограничивающие начальные условия, свойства. Если первооснова – Материя, то Творец Всего сущего на её основе уже не может быть Всемогущим в самом широком смысле слова: по меньшей мере, он не может создать причину себя самого – Материю. И, напротив, если первопричина всего – Творец, в том числе и причина себя самого, то Материя теряет свойство Вечности, поскольку у неё есть начало, момент её создания.

Логическим следствием этого отсутствия преимущества предшествования и является Основной Вопрос Философии. Только ответ на него может задать исходную точку мировоззрения: идеалистического или материалистического. Уйти от ответа на него невозможно ни философу, ни физику.

Можно лишь скрыть от внешних глаз свой неявный ответ на него. Неявный, возможно, даже для себя самого.

И, тем не менее, вечный спор о том, что первично – Сознание (идея, Бог) или Материя не прекращается. Или, что то же самое, спор между наукой и религией – кто из них более верно описывает реальность? Наконец, возникшее в последние десятилетия новое противоборство – между философией и физикой. Невообразимые успехи последней словно вскружили голову физикам, а философы, наоборот, не проявили должной прозорливости, не заметили наметившегося уклона физической мысли в сторону идеализма и даже мистики.

В последние время всё чаще можно встретить заявления ведущих учёных современности, физиков с критической оценкой философии и религии. Они делают заявления о том, что физике не нужны ни философия, ни бог. "Философия мертва" – так в двух словах можно сформулировать основной смысл таких заявлений. Или "Наука не нуждается в Боге". Последний тезис имеет довольно давнюю историю. Известен ответ Лапласа на вопрос Наполеона: "Вы написали такую огромную книгу о системе мира и ни разу не упомянули о Боге!", на что Лаплас ответил: "Сир, я не нуждался в этой гипотезе". В несколько изменённом виде этот легендарный диалог повторяется в наши дни. Известному физику современности приписывается высказывание "Там, где начинается философия, физика заканчивается".

Все это довольно странно и даже местами забавно. Философия означает "любовь к мудрости". Любят ли физики мудрость? Или все их экспериментальные и теоретические достижения к мудрости не имеют никакого отношения? А уж что получится, если заменить в критических высказываниях слово философия на его смысловое значение!

Пожалуй, наиболее яркой художественной и вместе с тем глубоко научной, с вескими, в высшей степени логичными доводами можно признать аргументацию в книге Хокинга и Млодинова "Высший замысел" [26]. Можно с уверенностью утверждать, что книга отражает мнение её авторов об однозначном и окончательном доказательстве отсутствия бога. "Доказано – Бога нет" – таким можно увидеть резюме книги. Хотя можно заметить, что к философии, материализму у физиков претензий, пожалуй, даже побольше, чем к религии, идеализму.

Не в качестве рецензии, а просто от полученных впечатлений следует отметить, что в переводном варианте книги язык изложения весьма доходчивый, живой. Рассмотрено множество аргументов, противоречащих "гипотезе о боге". По глубине доводов, опровергающих существование бога, книгу можно поставить на другую чашу весов с доводами о существовании бога Фомы Аквинского.

Вкратце, выборочно рассмотрим некоторые её фрагменты и постараемся определить, достигла ли аргументация главной, указанной выше цели, следует ли согласиться с её авторами. Рассмотрим, например, следующий тезис:

"М-теория предсказывает, что из ничего было создано огромное множество вселенных. Для их сотворения не требуется вмешательства сверхъестественного существа или Бога. Скорее, эти многочисленные вселенные возникают естественным путем по законам физики" [26, с.13].

Сразу же отметим здесь двусмысленность довода – "естественным путем по законам физики". Конечно, звучит это весьма солидно – закон. Однако, тем не менее, сразу же возникает определённое недоверие. Закон, это понятно. Это то, что предопределено до начала наших действий. Но, что странно, неужели ни у кого не возникает при этом простой, элементарнейший вопрос: откуда он, собственно говоря, взялся, этот закон? Весьма интересную мысль по этому поводу высказывает Виленкин:

"Картина квантового туннелирования из ничего наводит на другой интригующий вопрос. Процесс туннелирования управляется теми же фундаментальными законами, которые описывают последующую эволюцию Вселенной. Следовательно, законы должны быть "на месте" еще до того, как возникнет сама Вселенная. Означает ли это, что законы — не просто описания реальности, а сами по себе имеют независимое существование? В отсутствие пространства, времени и материи на каких скрижалях могут быть они записаны? Законы выражаются в форме математических уравнений. Если носитель математики — это ум, означает ли это, что ум должен предшествовать Вселенной?" [5, с.269].

Вопрос, действительно, не простой. Если Вселенные естественным путем *возникают* по каким-то законам, то явно до их возникновения, в тот момент, когда Вселенных ещё не было, эти законы уже должны иметь силу. И что означает "естественным путём"? Вообще-то, такая формулировка "естественным путём по законам физики" на самом деле ничего не означает. Это просто фраза, ничего не определяющая. Действительно, просто добавим к ней два слова: "естественным путём по законам физики, созданным Богом". Всего два слова, которые легко и непринуждённо изменяют в точности на противоположный смысл исходной фразы, который как мы обоснованно предполагаем, был заложен авторами.

Кстати, профессор Пономарь В.В. в статье, являющейся, по сути, полным антагонизмом работы авторов книги, и которая аргументирована ничуть не меньше, чем у них, есть фраза, практически являющаяся полным аналогом цитаты, но в точности с противоположным смыслом. Заметим, что работа написана учёным в самом полном смысле этого слова: доктором технических наук, профессором. Утверждается, что астроном Иоганн Медлер, создатель первой карты Луны, писал [22, с.9]:

"Истинный ученый не может быть неверующим, так как *естественные* законы и законы Бога – это одно и то же".

Не правда ли, поразительное сходство в противоположности? Иначе говоря, приведённая фраза авторов книги не имеет никаких серьёзных оснований претендовать на доказательство отсутствия бога.

"… начался долгий процесс замены понятия о власти богов на концепцию Вселенной, управляемой законами природы и созданной по замыслу, который мы когда-нибудь сумеем разгадать" [26, с.21].

Нетрудно заметить, что и здесь присутствует тот же самый элемент доводов – "управляемый законами природы". Кроме этого, еще более двусмысленный момент виден в обороте "созданный по замыслу", поскольку не указано, о замысле кого (бога?) или чего (?) идёт речь. Сама по себе формула "по замыслу" предполагает источник этого замысла, его носитель. То есть, мы вновь встречаем в цитате действие неких кем-то созданных "законов природы". На каком логическом основании они противопоставляются "власти бога"? Конечно, пока рано судить о веском обосновании, поскольку это лишь частный довод и, видимо, в дальнейшем должны быть его доказательства.

Авторы с едва заметным скепсисом цитируют Аквинского, который писал:

"Все в природе движется к своей конечной цели не случайно, а по какому-то намерению... И стало быть, имеется разумное существо, которое направляет все, что есть в природе, к конечной цели..." [26, с.28].

Этот тезис здесь приведён, понятно, как опровергаемая авторами точка зрения. Несколько забегая вперёд, отметим, что авторами оборот "существо, которое направляет всё" будет фактически просто заменен на оборот со смыслом, формально совпадающим с опровергаемой точкой зрения: вместо бога просто напросто будет предложена некая иная "направляющая сила", имеющая, в сущности, практически божественные атрибуты.

"Декарт полагал, что Бог установил законы природы, но не имел возможности их выбирать. Он взял их потому, что законы, которые мы ощущаем, являются единственно возможными" [26, с.32].

Отметим тождественность оборотов "законы природы" и "законы, управляющие природой". При этом их "единственная возможность" явно ограничивает могущество Бога. То есть, здесь Декарт представлен недостаточно последовательным идеалистом. Если Бог, Логос, Идея и обладает неким подобием интеллекта, является своеобразным подобием личности, наделённой желаниями, интересами, то "урезание" его возможностей фактически означает продолжение этого отождествления с человеческой личностью. Другими словами, это можно трактовать, что не бог создал человека по своему образу и подобию, а человек создал бога по своему образу и подобию. Формулировка "единственно возможные" законы исходит из явно логически неверного предположения об ограниченности законов, причем созданных неясно кем, формально, никем или ничем. Однако логичнее считать, что только личность, Бог может быть создателем и, соответственно, причиной всего, основанием каких бы то ни было ограничений или разрешений. Только личность может *решить* при создании, что "законы, которые мы ощущаем" должны быть таковыми и непреодолимыми. Только у личности, Бога может быть возможность *создать* любую "конфигурацию" Бытия. Другой вопрос, почему он *выбрал* их именно такими. Но лишь он, личность и ничто иное может *выбрать* их, *назначить*, *сформулировать*. И Бога по определению лишать этого всемогущества совершенно неестественно.

"Если природой управляют законы, то возникает три вопроса:

1) Каково происхождение этих законов?

2) Бывают ли исключения из этих законов, то есть чудеса?

3) Имеется ли только один набор возможных законов?" [26, с.34]

Можно заметить, что в этом перечне вопросов априори заложена "ловушка" для отвечающего:

"…если мы прибегаем к Богу, отвечая на первый вопрос, то со вторым вопросом, касающимся чудес, исключений из законов, — настоящая беда" [26, с.34].

Здесь мы вновь отметим специфические обороты - "исключения из законов", понимая их как "*действия*, нарушающие законы", и оборот "возможные законы" в указанном выше смысле ограниченности возможностей создателя законов. Другими словами, тем самым неявно подразумевается, что исключения из законов происходят *вопреки* воле их создателя. Поэтому "настоящая беда" возникает лишь в этом случае, но не в случае всемогущества Бога. В последнем случае формально никакой беды нет: если есть Его желание, то такие исключения из законов вполне допустимы. Если же исключений мы не наблюдаем, то, как говорится, на то *воля божья*. Однако здесь опять прячется тайный смысл. Почему-то считается, что "исключения из законов" – это нарушение закона. На то и Бог, чтобы *изначально* создать или не создавать законы с исключениями.

То же относится и к набору возможных законов. Для всемогущего бога нет никаких препятствий по формированию таких наборов. Мы, человечество просто не в состоянии представить себе, что могут быть такие другие наборы. Часто в литературе можно встретить рассуждения на тему "что будет, если такая-то константа измениться всего лишь на 10 в минус десятой степени". И далее делается вывод, что в этом случае мир просто не сможет существовать. Но это логика человека, созданного именно в таком мире, для которого богом установлены именно эти соотношения. И совершенно невозможно вообразить, чтобы были законы с иной логикой, помимо той, что *назначил* бог для этого мира. Очень похоже на жалобу автомобилиста, врезавшегося в столб: ну, почему кому-то пришла в голову идея поставить столб *именно в этом месте*?!

"Принцип научного детерминизма, сформулированный Лапласом, является ответом современного ученого на второй вопрос" [26, с.36].

Отметим здесь, что детерминизм означает, в частности, *независимость* явлений реальности от чьей бы то ни было воли, и что, в свою очередь, тождественно "единственной возможности" законов природы. И вместе с тем, ничего удивительного в этом нет и быть не может, поскольку детерминизм входит в "обязательную божественную поставку" вместе со всеми известными человечеству законами природы.

Естественно, что логика, созданная для этого мира, автоматически приводит к обоснованию детерминизма. Представить себе, что может быть иная логика, индетерминизм, иные законы природы, отличающиеся от известных нам, человек просто не в состоянии. Это примерно то же самое, что для поездки в автобусе в Москве нужен билет, предназначенный для этой поездки, и не подойдёт билет для поездки в автобусе в Лондоне.

"Эти законы должны действовать везде и всегда, иначе они не будут законами. Не может быть никаких исключений или чудес. Ни боги, ни демоны не могут вмешиваться в ход развития Вселенной" [26, с.193].

Эта невозможность вмешательства, строго говоря, иллюзия. Цитата ни в малейшей мере не доказывает, что не Бог установил законы, что он не может отменить или изменить их. Логика "должны… иначе" здесь крайне слаба. В Природе вообще нет никаких законов, все они – в наших головах! Есть лишь явления, которые мы наблюдаем, считая их реально существующими, и вешаем на них наши умозаключения, будучи уверенными в их правильности. Неспроста множество таких "законов" Природа отменила. Меняет Бог законы или нет, неизвестно. Судя по наблюдениям, это "не его стиль" и установленные им законы будут действовать, скорее всего, весь срок существования человечества. Сводить его могущество к нашим представлениям о могуществе, довольно ненадежная аппроксимация.

То, что Бог (а не боги) не может вмешиваться в ход развития Вселенной – это благие пожелания авторов книги, которые, впрочем, вполне согласуются с наблюдениями. Однако если бог и захочет вмешаться в ход развития Вселенной, то мы об этом можем просто не узнать. А требовать от бога (Логоса, Идеи) доказывать своё могущество – это, понятное дело, наивно.

"При такой точке зрения считается, что есть некая сущность, не нуждающаяся в творце, и ее называют Богом. Подобное мнение известно как основной аргумент в пользу бытия Бога" [26, с.194].

Да, это верная формулировка. В цитате авторы чётко сформулировали главное в понятии "первопричина" - она никем и никогда не была создана, существовала без возникновения, вечно. Тем не менее, авторы заявляют:

"Однако мы утверждаем, что на эти вопросы можно ответить строго в рамках науки, без привлечения каких-либо сверхъестественных существ" [26, с.194].

В рассмотренной выше аргументации действительно убедительных оснований для такого утверждения, вообще-то, найти не удалась. В сущности, это означает, что данное утверждение является проявлением веры, формально не имеющей никакого отличия от веры религиозной, в Бога.

"Самопроизвольное рождение и есть причина того, что Вселенная существует. Нет необходимости призывать на помощь Бога, чтобы он поджег фитиль и дал начало развитию Вселенной. Именно поэтому есть что-то, вместо того чтобы не было ничего, поэтому существуем и мы" [26, с.204].

И этот вывод, который авторы рассматривают как решение выше рассмотренных якобы противоречий, тоже вера, реально ни на что не опирающаяся. Доводы, которые представлены авторами как противоречия при обосновании существования Бога, невозможно признать таковыми. Всё рассмотренное вполне вписываются в концепцию бога как первопричины и создателя всего Сущего. Более того, предлагаемая авторами концепция *самопроизвольного рождения* абсолютно ничем не отличается от концепции самопроизвольного вечного существования бога. При внимательном прочтении книги не удастся найти обоснования, почему возможным оказывается именно "самопроизвольное рождение" Вселенной? И чем оно лучше "рождения Вселенной по воле Бога"? Все дело в том, что *ничем*. Самопроизвольное рождение Бытия это *тождественно* то же самое, что и создание его Богом. Более или менее существенным различием здесь можно считать, что "самопроизвольное рождение" имеет некую определенно загадочную точку начала отсчета, в то время как бог такого "начала" не имеет. Однако в этом смысле Бог куда более гармонично вписывается в концепцию диалектического материализма.

Если вновь просмотреть доводы авторов, то можно заметить одну объединяющую их все идею. Все они имеют в основе *человеческую (антропную) логику*, предполагающую *обязательность* некоторой руководящей, направляющей, регулирующей Идеи. Каждый из выделенных оборотов подразумевает одно и то же: возникли "самопроизвольно" или были "осознанно" созданы *предопределённые* правила, то есть правила, которые могли быть только такими и никакими иными. Изменение этих правил считается проблематичным. Другими словами, "между строк" видна до-божественная сущность этих правил – "законов природы". Что бы и кем бы ни было создано, возникло что-то по чьей-то осознанной воле или возникло "самопроизвольно" - но возникло по уже *предопределённым* правилам. И вот эта предопределённость как-то странно и использована в роли истинной причины, доказательства невозможности существования Бога.

Вместе с тем, "самопроизвольное рождение" никак не может служить объяснением предопределённости законов природы, которые, получается, были предопределены *до* самопроизвольного рождения.

Кроме того, в случае осознанного создания Бытия Богом такое противоречие не возникает. Не было никакого "самопроизвольного" возникновения Бога. Это вечная сущность, нет у неё начала. Поэтому и доначальная предопределённость законов природы тоже не нужна. Они – вечно существующая Идея.

Тогда что можно сказать о "доказательстве Бога" Фомой Аквинским? Выходит, что прав он и он действительно доказал, что Бог причина всего? Рассмотрим один из его доводов. Фома Аквинский приводит, например, такое доказательство:

"…невозможен такой случай, чтобы вещь была своей собственной производящей причиной; тогда она предшествовала бы самой себе, что невозможно. …Следовательно, необходимо положить некоторую первичную производящую причину, каковую все именуют Богом" [25, 22].

То есть постулятивно устанавливается: первопричина, не имеющая причин, может быть только Богом. Идею о вечном существовании некоторой *небожественной* субстанции автор не рассматривает. Другими словами, априори, принудительно он отбрасывает все иные варианты "первопричины всех причин", закрепляя эту роль за богом. Однако легко обнаружить, что из точно такой же концепции, но в отношении другой субстанции исходит диалектический материализм – это Материя. Этот постулат можно кратко сформулировать как "Материя существует", смысл которого состоит в том, что первоосновой, "первопричиной всех причин" является именно Материя, а "существование" означает вечную изменчивость, движение, взаимодействие Материи.

Отметим, что этот тезис является таким же *постулатом*, как и тезис авторов книги и тезис Фомы Аквинского. Проведённый выше анализ доводов авторов книги показал это с неизбежностью: выводы авторов *безусловно* являются постулатом, то есть истиной, принимаемой без доказательств. Доказательства в книги не являются однозначными доказательствами. То есть, материалистический *постулат* о первичности материи полностью совпадает с провозглашенным в книге доказательством отсутствия, ненужности понятия Бога, которое тоже является *постулатом*.

В более широком смысле можно, разумеется, признать вторичность Бога, его производность, рождение в рамках материального Бытия, поскольку даже в известных ныне явлениях есть элементы довольно-таки ненаучного характера. Физики не способны объяснить эти явления. Даже чисто физическое явление – квантовая нелокальность – не имеет реалистичного объяснения в квантовой механике. Просто молча принимается антифизичное, мистическое взаимодействие запутанных частиц.

И, наконец, доказательство бога Фомы Аквинского *также* отмечено нами выше как *постулат*.

Несложно заметить, что здесь предложены выводы, явно нацеленные на основной вопрос философии о первичности. Рассуждая с точки зрения Физика, рассматривая при этом религиозные аспекты, мы, похоже, попали в область, подконтрольную философии! И это не просто "красивый реверанс". На всём протяжении анализа слово "философия" не использовалось ни разу. Но в итоге мы вывели два встречных вывода о существовании бога и его ненужности для науки. А это и есть основной вопрос философии. В зависимости от ответа на основной вопрос философии – что первично, Идея или Материя – все философы разделились на два класса: идеалистов и материалистов. Очевидно, что отрицание бога как первопричины всего сущего делает соавторов книги четко определившимися материалистами, то есть, они сами отнесли себя к этому классу философов. Поэтому утверждения "философия мертва" оказывается в их устах пустой фразой, лукавством:

"Как развивается Вселенная? В чем суть реальности? Откуда все это взялось? Нуждалась ли Вселенная в творце? … Традиционно на такие вопросы отвечала философия, но сейчас она мертва" [26, с.9].

Кажущаяся исключительно физической книга вдруг определённо получила признаки весомого философского труда. Король умер, да здравствует король?

Первопричина и первооснова всего сущего

Ну, хорошо, Физик неявно причислил себя к материалистам, пусть неосознанным, наивным. Как бы он ни пренебрегал философией, как бы ни отвергал её, этот титул материалиста будет преследовать его всегда. Что эта приверженность материализму даёт ему, мешает ли, помогает?

Здесь следует присмотреться к некоторым физическим выводам, имеющим неявный философский контекст. Современные открытия потрясают воображение. Открытия в физике на основе сложнейших математических аппаратов квантовой механики, теории относительности, М-теории и тому подобных. Открытия в космологии, показавшие отклонения от считавшихся незыблемыми законов небесной механики и приведшие к появлению понятий "темной материи", "темной энергии". Открытия в генетике, связанные с расшифровкой генома человека. Все эти открытия имеют и "сопутствующие" последствия, объяснить которых с чисто материалистических позиций всё труднее.

Появляются теории (гипотезы), которые противоречат не только здравому смыслу, к чему все уже привыкли, но и формальной логике – фундаменту всей математики, да и науки в целом. Например, упомянутая выше нелокальность однозначно противоречит специальной теории относительности: на достаточно простом примере с её использованием можно показать, что движущиеся часы идут синхронно. Но в физике нелокальностью постулятивно назвали взаимосвязь между запутанными квантовыми частицами, не приводя ни доказательств наличия или отсутствия связи, ни объяснения "наличия связи без наличия связи". Этот подход называют квантовой логикой, но выглядит она как откровенная мистика. Или другой пример – оксфордская, многомировая интерпретация квантовой механики Эверетта. Расщепление миров и наблюдателей (нас с вами) на бесчисленные ветви альтерверсов выглядит, по меньшей мере, как плохая идея.

Ещё одно многомирие – мультиверс Линде – это точно такое же бесчисленное множество Вселенных. Причём альтерверсы и мультиверс должны либо включать в себя друг друга, либо отвергать. Альтерверсы в мультиверсе или мультиверс в альтерверсах – как говорится, выбирай по вкусу. Как вариант всерьёз рассматриваются параллельные миры, в каждом из которых есть такое же бесчисленное множество наших копий. Кроме того строго научно рассматриваются миры с физическими законами, отличающимися от законов в нашей Вселенной, против чего косвенно выступают соавторы книги, как показано выше. Например, М-теория допускает существование порядка 10^{500} физических миров с разными законами – ландшафт теории струн.

Конечно, неверно утверждать, что это именно материализм отвергает все эти мистические, паранормальные многомирия. На самом деле эти гипотезы имеют серьёзные противоречия с формальной логикой, а философия всегда согласовывает свои выводы с практикой, то есть, с научными доказательствами, что делает её действительно истинной. А в самих научных кругах все эти гипотезы признаются недоказуемыми, хотя, конечно, и предпринимаются попытки поиска путей их доказательства.

Формальная логика является главным инструментом философии. Однако следует отметить, что в науке интерпретации этих доказательств являются основной проблемой доказательности. Вот здесь и следует прислушиваться к доводам философии. Фундаментальные принципы философии, такие как основной вопрос философии, не могут быть пересмотрены, доказательства наличия или отсутствия бога невозможны в принципе. Из этого непосредственно следует фундаментальность первопричины всего сущего. Для материалиста – это вечная и бесконечная Материя. Она никогда не возникала и никогда не исчезнет. Что касается Пространства и Времени, которые мы ощущаем в нашей Вселенной, то следует четко различать Материю и её Проявления. Изменчивость Материи привела к возникновению такой её формы как наш вещественный мир, наблюдаемыми формами существования которого и являются Пространство и Время. Поэтому нет никаких противоречий с их ограниченностью.

Конечно, бесконечность Материи формально не противоречит существованию любого многомирия, а бесконечность её проявлений не противоречит появлению любых форм движения – законов физики. В этом смысле многомирие и параллельные миры не противоречат этой первооснове.

Но Материи с бесчисленными свойствами не противоречат также и любые мыслимые мистические явления. Где-то, может быть даже рядом, есть мир, в котором обитают и джины и волшебники. Доказать или показать, что их нет, невозможно. Однако пользы от этой гипотезы нет никакой. Разве что, можно снять ещё один – другой фантастический или мистический фильм.

Вместе с тем, само признание Материи как первоосновы является постулатом, ответом на основной вопрос философии. Её первичность так же недоказуема, как и первичность, существование Бога. Более того, эти две гипотезы взаимопроникающие. В реальности, где первооснова всего сущего материя, ничто не препятствует существованию Бога с известными нам качествами. Он, как говорится, всё видит, но ни во что не вмешивается. Любой его поступок непротиворечиво вписывается в предысторию "вторичности" по отношению к материи. Ни рай, ни ад не противоречат первичности Материи. А вот проблемы с априорностью и неизменностью законов природы исчезают.

И наоборот, первичность Бога также не вызывает принципиальных проблем. Конечно, не того Бога, которого наделили всеми человеческими качествами, а Идеи, доматериальной сущности, неисповедимое поведение которой и создало начальную бесконечную и вечную Материю, из которой затем возникла наша реальность. Кому-то может не понравиться оборот "создало вечную Материю", что выглядит как противоречие. Это противоречие – принадлежность антропного мышления, логики. Логос, Идея – это совершенно иная логика, подходить к которой с мерками человека наивно.

Таким образом, вопрос первопричины бытия – это исключительно философский вопрос, имеющий два равноправных и равно недоказуемых ответа. Почти как в притче о Ходже Насреддине: и ты прав, и ты.

Для материалиста возникновение нашей Вселенной не может рассматриваться как возникновение из ничего. Нет, Большой Взрыв произошёл в пределах Материи. Причём никакой сингулярности с фантастическими, нефизическими свойствами для этого вовсе не требуется. Материя просто перешла в одно из своих состояний – вещественное. Процесс этот мог, например, иметь сходство с процессом вскипания перегретой жидкости или конденсации перенасыщенного пара наподобие камеры Вильсона. После образования "конденсата" процесс мог идти по известному сценарию. В дальнейшем в пространстве Вселенной продолжают образовываться, "доконденсироваться" отдельные "атомы пространства", что мы и наблюдаем как расширение пространства. Объяснение разбегания галактик в этом случае не требует привлечения какой-либо "тёмной энергии".

Так каков же вывод?

Действительно, каков? Ни наука, ни религия не имеют объективного доказательства своих прав на исключительную истину, поэтому доказательство ненужности Бога в рассмотренной книге можно признать несостоятельным. Есть только право всего лишь на априорный выбор ответа на основной вопрос философии.

Ученый верующий исследует некоторое явление точно так же, как и другой, неверующий. Если первый открывает новый закон природы, созданной Богом, то второй открывает этот же закон, присущий материальному миру. Если один из них делает на основе открытого закона какие-то предсказания, то точно такие же предсказания делает и второй. Разница возникает только тогда, когда делаются фундаментальные выводы, так называемые интерпретации. Если верующий с лёгкостью может остановиться на формулировке, прекращающей познание, то второго это не может устроить.

Граница, разделяющая идеалистические или материалистические интерпретации, является едва заметной, и не всегда можно отличить мистическую, идеалистическую интерпретацию от материалистической, строго научной. Из ярких примеров такой "тонкой" интерпретации можно назвать нелокальность.

С физической точки зрения это противоречивое явление. С одной стороны нелокальность обозначает сверхсветовое взаимодействие частиц, что, на первый взгляд, противоречит общепризнанной и никем не опровергнутой специальной теории относительности. С другой стороны, это противоречие сглаживается тем, что такое взаимодействие не имеет научно признанного носителя. Но, опять же, даже отсутствие такого носителя позволяет в реально осуществимом эксперименте показать, что одно из явлений специальной теории относительности нарушается: движущиеся относительно часы идут синхронно, что противоречит преобразованиям Лоренца этой теории.

Вот здесь и проявляется идеалистическо-мистическая сущность понятия нелокальности. В физике она не имеет вообще никакого описания, механизм её проявления неизвестен. Из логических соображений следует признать "виновником" нелокальных взаимодействий другого гипотетического участника – тахион. В этом случае логические странности нелокальности исчезают, но возникают серьёзные противоречия в СТО: движение в прошлое с нарушением причинно-следственных связей. Такое нарушение также нарушает и детерминизм, что для научной теории неприемлемо.

Другим "побочным эффектом" нелокальности является нефизическое обоснование так называемых "тонких миров", суть которых откровенно мистическая или, по меньшей мере, религиозная.

Нет у науки и приемлемых объяснений явлениям предсказаний. Неявно, но под научным углом зрения любое предсказание – это "взгляд в будущее". Иначе – путешествие в будущее, регистрация явлений в нём и последующий возврат в прошлое. А такой возврат в прошлое неизбежно ведёт к парадоксу ведущих научных теорий.

На такие неустранимые противоречия между реально зафиксированными явлениями наиболее остро реагирует философия. Если в физике и удаётся на какое-то время спрятаться за нераскрытым понятием, то в философии это сразу же становится актуальной проблемой, и философия требует от физики предоставить её определённое решение. Причём мировоззренческий характер философии не даёт никаких шансов на замалчивание проблемы.

Не менее фундаментальной мировоззренческой проблемой являются некоторые выводы физики при манипуляциях со временем и пространством. Нередко провозглашаются выводы изначально и принципиально непроверяемые. Одной из таких, по существу, лженаучных гипотез являются альтерверсы Эверетта. Хотя гипотеза эта выдвинута на получение ученой степени по философии, она фактически является анти-философской. Действительно, одним из важных выводов философии следует считать вывод о том, что принципиально ненаблюдаемые явления следует считать несуществующими.

Наконец, весьма резким контраргументом авторам книги можно назвать труды Ивана Панина, известные в наши дни как "Код библии". Доводы Панина являются, несомненно, в высшей степени научными, но выводы при этом прямо указывают на существование Бога. Вообще-то, странно, что в "Великом замысле" этот вопрос не рассмотрен. А ведь, завершив свои исследования, Панин предложил агностикам (атеистам) опровергнуть его выводы о божественном происхождении Библии, обратившись к целому ряду известных учёных. Никто из них так и не смог привести сколь-нибудь внятных возражений.

Суть "кода библии" состоит в способе математического разложения на периодические последовательности символов текста Библии. В частности, оказалось, что отдельные области Библии содержать явно осмысленный текст о будущих событиях. Не вдаваясь в детали, можно привести, например, такую комбинацию:

"Близнец + Башни + они разрушены + самолет" [16].

Эта комбинация слов образуется в результате априори алгоритмического сбора в группы символов с различными периодами. Например, если взять каждый 26-ой символ библии, то встретится их комбинация, образующая слово "близнец". Рядом символы с периодом 27 образуют слово "башни". И все эти слова – в пределах небольшой области текста около 3000 символов.

Попытки такого же математического сканирования других больших текстов, упоминается "Анна Каренина", не дают никаких осмысленных комбинаций слов. Считать, что это случайное совпадение, не представляется возможным. Как можно объяснить, например, такой набор групп букв:

"Конец Дней, В Конце Дней, Арафат, Барак, Шарон, Буш"? [16]

Доводы весьма серьёзные и отмахиваться от них нельзя. Во всяком случае, современные научные представления не дают уверенного ответа на такие, якобы, вероятностные, но осмысленные совпадения в конкретном тексте. При этом, во-первых, этот текст с такими "случайными" совпадениями, – единственный, а, во-вторых, это текст, приписываемый богу. Здесь нужен куда более взвешенный, логически обоснованный подход, нежели ссылка на "естественное происхождение законов физики".

Вместе с тем, альтернативой предсказаниям с путешествиями в будущее и обратно является предсказания детерминистические, на основе какого-либо алгоритмического вычисления событий. Безусловный детерминизм и причинно-следственные связи уничтожают всякую абсолютную случайность – всё строго предопределено, не существует никакой свободы воли, есть только судьба, фатум. Гипотетически можно просчитать все события как в прошлое, так и будущее, то есть, предсказать их. При этом философское понятие случайности никуда не исчезает. Поскольку Материя вечна и бесконечна, то *полной* цепочки причинно обусловленных событий реально не существует, они просто недоступны.

О первичности геометрии Евклида

Если внимательно, придирчиво присмотреться к геометрии Евклида, то, не подвергая сомнению заслуги и величие мыслителей и математиков прошлого и современности, и, вопреки распространенному мнению, все-таки придется признать, что именно эта геометрия, евклидова является первичной, фундаментом всех возможных вариантов геометрии. Только в ней существует действительно *прямая* и действительно *плоскость*. Точно так же фундаментальными можно признать бинарное исчисление, базовой основой мышления - формальную логику, диалектический материализм с вечной и бесконечной Материей - основой реалистического мировоззрения, а закон детерминизма и нерушимости причинно-следственных отношений – самым фундаментальным законом Природы. Тем не менее, евклидова геометрия чаще всего рассматривается как часть геометрий Римана или Лобачевского, в некотором смысле как производная от них, частный случай. Действительно, на предельно малых участках поверхностей в рамках той и другой геометрий почти полностью выполняются положения геометрии Евклида. Слово "почти" здесь использовано умышленно.

С другой стороны, геометрии Лобачевского и Римана можно рассматривать как геометрии на искривлённых, деформированных *евклидовых* плоскостях. Следует признать, что только пространство Евклида с постоянной нулевой кривизной может быть бесконечным и бескрайним. Если считать все-таки основными искривленные и деформированные поверхности с положительной или отрицательной кривизной, то неизбежно возникает вопрос: какая же тогда геометрия является основной, если евклидова – частный случай? Римана или Лобачевского?

Надо заметить, что эти геометрии появились в некоторой степени в попытках найти решение знаменитой проблемы V-го постулата Евклида. Можно считать, что их создание фактически и послужило основанием для следующего ошибочного заявления:

"Итак, прошли два тысячелетия, прежде чем была установлена логическая независимость пятого постулата Евклида" [4, с.17].

Однако это неверно, пятый постулат *не является независимым* от первых четырех. Покажем это, опираясь исключительно на очевидность, здравый смысл и логику. Бесспорно, что в наблюдаемых явлениях многое очевидно, то есть не нуждается в каком-либо обосновании, объяснении и доказательствах. При этом с возражением, что одному очевидно одно, а другому – другое, можно безоговорочно согласиться: это очевидно. Здесь же очевидность является неким оправданием отказа от строгих математических доказательств, ничем не обоснованным призывом к несогласным оппонентам: пусть *желающие* докажут обратное. При этом следует понимать, что здесь очевидность предполагает не столько недоказуемость приведенных выкладок, но, в первую очередь, возможную их ошибочность. Приводимые ниже выкладки, наблюдения, очевидные и логические построения интересны сами по себе даже при отсутствии их доказательств. Арбитром в этом конфликте очевидностей выступает здравый смысл. Именно он и заставляет нас признать эту "многополярную" очевидность. Именно здравый смысл требует от нас опираться на логику, а уж по поводу неё, надо думать, возражений быть не может.

Среди аксиом (постулатов) Евклида V постулат занимает особое место. В наши дни в России он более известен в виде равносильной аксиомы параллельности: В плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной. На протяжении столетий многие математики пытались доказать этот постулат, исходя из предыдущих четырех постулатов Евклида, пытались доказать, что он – лишний, то есть может быть доказан как теорема на основании остальных аксиом. Но это никому так и не удалось:

"Авторы этих доказательств ставили себе задачей вывести логическим путем V постулат из остальных постулатов Евклида. Следует заметить, что хотя эта задача стояла перед геометрами на протяжении многих веков, она до конца XIX столетия оставалась неопределенной.

Действительно, определения и аксиомы Евклида столь несовершенны, что не могут служить базой для развертывания строгих логических построений. Интересно, что проблема V постулата, уже будучи решенной Лобачевским, все еще не была точно сформулирована, так как во времена Лобачевского недостатки евклидова обоснования геометрии оставались неустраненными.

После изложения аксиом Гильберта мы получаем возможность проблему V постулата сформулировать точно следующим образом:

Приняв аксиомы, перечисленные в группах I—IV, вывести из них аксиому V.

Результат Лобачевского мы можем теперь выразить также с полной определенностью:

Аксиома V не является следствием аксиом I—IV.

Этот же результат может быть формулирован иначе:

Если к аксиомам I—IV присоединить положение, отрицающее справедливость аксиомы V, то следствия всех этих положений будут составлять логически непротиворечивую систему (неевклидову геометрию)" [9].

Очень важно обратить внимание на то, что доказательство V постулата Евклида в приведённой цитате предлагается делать не на основе его постулатов, а на основе аксиом Гильберта. Аксиоматика Гильберта - это новая система аксиом евклидовой геометрии. Разработана Гильбертом в 1899 году как первая достаточно строгая и более полная аксиоматика, нежели система аксиом Евклида. Попытки улучшения евклидовой аксиоматики предпринимались многими математиками, но подход Гильберта, при всей его консервативности в выборе понятий, оказался более успешным. Вместе с тем, причиной неудачи известных доказательств V постулата следует считать не столько слабость постулатов Евклида, сколько слабое определение основного понятия - прямой линии. Поскольку прямая определена слишком обще, появилась возможность подмены понятий.

Определяющим следствием пятого постулата является единственность прямой, параллельной данной и проходящей через внешнюю точку. Очевидно, что это утверждение допускает два противопоставления: такой прямой нет вообще и прямая не единственная. Первое противопоставление привело к появлению геометрии Римана, второе - к геометрии Лобачевского. Эти два обстоятельства – нечёткое определение прямой и примеры нарушения постулата – наталкивают на мысль, что эти две криволинейные геометрии и должны стать основой для доказательства постулата. Если дать корректное определение прямой и плоского изотропного пространства, то появится возможность доказательства V постулата Евклида строго на основе его предшествующих постулатов. Отсюда можно дать и обратное определение "действительно прямой линии". Это такая линия, для которой выполняется V постулат Евклида. У Евклида постулаты I-V сформулированы следующим образом:

"Допустим:

1. Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию.

2. И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать по прямой.

3. И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг.

4. И что все прямые углы равны между собой.

5. И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых" [8].

С учетом того, что IV постулат Евклида был доказан как теорема, теорема о V постулате Евклида могла бы иметь, например, такой вид:

Постулат V Евклида в эквивалентной формулировке "В плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной" является следствием I-III постулатов Евклида.

Для доказательства присмотримся к постулатам Евклида более внимательно. Будем говорить о выводе 5-го постулата из 3-х предыдущих в форме его логической зависимости от них. Особый интерес для нас представляет III постулат Евклида. Обратим самое пристальное внимание на слова "всяким" в этом постулате: "из всякого центра и всяким раствором". Это очень важное слово. Евклид будто предвидел появление геометрий Лобачевского, Римана и других возможных неевклидовых геометрий. Этот постулат явно все их *отсекает*! Однако на важность третьего постулата никто не обратил внимания. Более того, в аксиомах Гильберта для абсолютной геометрии третий постулат оказался настолько "спрятан", что эта подмена понятий вообще стала не видна. Попробуем найти, в какой из 20-ти аксиом Гильберта "спрятался" третий постулат Евклида [7]:

I_1. Каковы бы ни были две точки *A, B,* существует прямая *a,* проходящая через эти точки.

В данной аксиоме просматривается явное сходство с первым постулатом Евклида: "Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию". Второй постулат присутствует неявно, в том смысле, что прямая продолжена дальше, чем от точки до точки.

I_2. Каковы бы ни были две точки *A* и *B,* существует не более одной прямой, проходящей через эти точки.

И эта аксиома относится больше к первому постулату, как его неявное усиление, расширение. Здесь видно, что единственность прямой вступает в противоречие со сферическим пространством Римана, но приём отождествления в эллиптическом пространстве устраняет это противоречие. Третий постулат в этих аксиомах по-прежнему не просматривается, отсутствует.

I_3. На каждой прямой лежат, по крайней мере, две точки. Существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.

Первая часть выглядит как обратная формулировка первого постулата. Вторая её часть, перекликается с разыскиваемым нами третьим постулатом Евклида, хотя и очень отдалённо: "И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг". Действительно, три точки, не лежащие на прямой – это точки, которые могут быть связаны, например, дугой окружности.

Если внимательно рассмотреть остальные группы аксиом, то можно легко обнаружить отсутствие в них какого-либо сходства с третьим постулатом. Только аксиома I_3 отдалённо напоминает третий постулат Евклида, принципиально отличаясь от него. Отсюда вывод: третий постулат Евклида исключён из аксиом Гильберта и не влияет на формирование последующих аксиом и постулатов. Поэтому пятый постулат Евклида никак не может быть выведен из аксиом Гильберта, и "явиться следствием аксиом I-IV Евклида": решающий постулат среди них отсутствует.

Однако рассмотрим, зависит ли пятый постулат от исключённого, отброшенного третьего постулата? Как считается, он не может быть выведен из предыдущих постулатов Евклида (с первого по четвертый). Но это не так: третий постулат является необходимым и достаточным условием справедливости пятого постулата. Если существует третий постулат, то и пятый имеет силу строго в формулировке Евклида, то есть, формально является его следствием. Действительно, допустим, V постулат не соблюдается. Для удобства рассмотрим производную от этого постулата формулировку - о единственности параллельной линии через внешнюю точку. Является ли такая формулировка теоремы верной и доказуемой? Чтобы выяснить это, рассмотрим следующие доводы, имеющие форму доказательства от противного, методом доведения до абсурда. Возможны только два указанных выше тезиса, противоречащие приведенной формулировке теоремы о пятом постулате:

1. Не существует ни одной прямой (Риман).

2. Существуют две (и более) прямые (Лобачевский).

Очевидно, что других противопоставлений теореме о V постулате не существует. Если при справедливости трёх постулатов Евклида будет доказан любой из двух перечисленных пунктов, то это будет означать ошибочность теоремы. Однако оказывается, что признание справедливости I-III постулатов Евклида делает эти два утверждения ошибочными. Рассмотрим подробнее каждый из этих двух вариантов опровержения теоремы о пятом постулате Евклида.

Не существует ни одной прямой

Первый из приведённых вариантов отрицания об отсутствии указанных прямых приводит к кривому анизотропному (деформированному) неевклидову пространству - Риманову. Согласно этому утверждению, мы получаем формулировку теоремы о V постулате в виде: "В плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной".

Если через точку нельзя провести ни одной прямой, то V постулат Евклида для этого пространства ложен. Но ложен он, как можно обнаружить, исключительно вследствие некорректного определения прямой линии. В геометрии Римана прямая – это геодезическая, кривая линия. Если определение прямой линии Евклида считать верным в расширенном толковании, вопреки вложенному в него геодезическому смыслу, то отсутствие параллельной прямой означает, что пространство кривое, сферическое.

Тем не менее, это принимается все-таки как доказательство нарушения V постулата Евклида. Но это не так! Постулаты Евклида определённо сформулированы им для плоскости - незамкнутой бесконечной поверхности с нулевой кривизной. Пространство Римана плоскостью не является.

Рассмотрим сферическое или эллиптическое пространство Римана в плане применимости к ним III-го постулата:

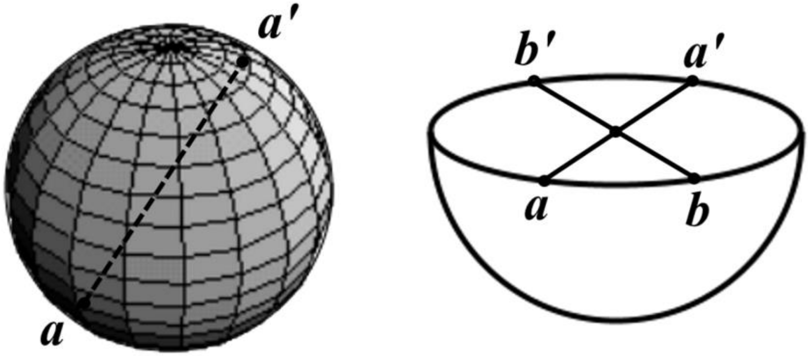


Рис.1. Сферическое и эллиптическое пространства Римана с отождествлёнными точками [17]. Две отождествлённые точки - это одна и та же точка на сфере (a=a' и b=b'). Невозможно описать круг на сфере радиусом, больше диаметра сферы.

То, что аксиома Гильберта I_3 имеет в этих пространствах силу, очевидно: всегда можно найти три точки, не лежащие на одной прямой. А вот третий постулат Евклида – нет! Причиной этого является замкнутость пространства: римановы сферические и эллиптические пространства не отвечают постулатам Евклида. Очевидно, что это не то плоское пространство, каковым его, несомненно, представлял Евклид. Получается: если указанную в доказываемой теореме прямую провести нельзя, то это означает, что пространство - кривое. В свою очередь, из этого следует и обратное утверждение, что прямую нельзя провести в пространстве положительной кривизны.

Кроме того, на такой поверхности не выполняется третий постулат Евклида. Действительно, совершенно очевидно, что если пространство Римана имеет радиус кривизны R, то на нём не выполняется требование постулата "из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг". Если взять раствор циркуля, равный, например, 4R, то в этом случае конец циркуля будет вне поверхности пространства Римана. Кроме этого, увеличение раствора циркуля свыше $2\pi R$ приводит к нарушению и II постулата Евклида, поскольку прямая сливается сама с собой (замыкается) и исключается вообще какая-либо возможность говорить о её длине как отрезке. Отдельно можно рассмотреть окружность (на сфере) с раствором циркуля, равным в точности $2\pi R$. В этом случае диаметр круга становится равным нулю. Правда, в этом случае речь идёт не о собственно "растворе циркуля", а о его подобии – упругом несжимаемом отрезке (веревке).

Отсюда следует: изменённый V постулат Евклида об отсутствии прямых не относится к постулированному Евклидом пространству. Это можно считать доказательством от противного: если V постулат Евклида ошибочен, то мы получаем неевклидово пространство, в котором нарушаются другие его постулаты, то есть абсурд. Следовательно, V постулат Римана ошибочен, а постулат Евклида верен.

Отсюда следует вывод: в согласии с пятым постулатом, через точку вне прямой обязательно проходит, по меньшей мере, одна параллельная прямая. И, как видим, этот вывод следует, только если справедлив третий постулат. В данном случае V постулат Евклида *требует* наличия третьего постулата, является его логическим следствием. Схематично можно сказать так: если есть третий, то есть и пятый; если третьего нет, тогда нет и пятого. Другими словами, отсутствие возможности провести требуемую параллельную прямую в этом случае не является следствием всех трех постулатов, как того требует теорема. Отсутствие такой прямой требует, чтобы не соблюдался третий постулат, что противоречит исходным требованиям теоремы. Следовательно, рассмотренная формулировка теоремы не может быть верной.

Существуют две прямые

Второй вариант отрицания, как утверждается, доказывается геометрией Лобачевского. Действительно, предположим, что прямых линий, отвечающих условиям постулата Евклида, может быть две. Это предположение, как известно, приводит к непротиворечивой геометрии Лобачевского. Однако на самом деле здесь присутствует всё та же подмена понятий. Скажем, называть шар кубом как-то не принято. А назвать геодезическую, кривую линию Лобачевского прямой линией – запросто. Но прямая Евклида и прямая Лобачевского – это геометрически совершенно разные понятия. Определение прямой у Евклида недостаточно корректно, но, несомненно, подразумевает действительно прямую линию, а не геодезическую.

Рассмотрим внимательнее гиперпространство Лобачевского. Доказано, что не существует полной и регулярной поверхности, внутренняя геометрия которой представляла бы геометрию полной плоскости Лобачевского. Известно, что Гильберт доказал наличие у этой плоскости существенных особенностей:

"не удаётся с помощью ни одной из известных до сих пор поверхностей постоянной отрицательной кривизны осуществить целиком всю плоскость Лобачевского"

"не существует аналитической поверхности постоянной отрицательной кривизны, не имеющей нигде особенностей и повсюду регулярной"

"на ... вопрос о том, можно ли по способу Бельтрами осуществить в евклидовом пространстве на некоторой регулярной аналитической поверхности всю плоскость Лобачевского, надо ответить отрицательно".

"Первоначально я доказал невозможность существования поверхности постоянной отрицательной кривизны, не имеющей особых точек" [7].

Суть регулярности поверхности Лобачевского состоит, очевидно, в постоянстве, неизменности отрицательной кривизны во всех её точках. Известно множество различных вариантов таких пространств, на которых *локально* осуществляется гиперболическая геометрия Лобачевского. Например, поверхности, соответствующие различным решениям уравнения синус-Гордона, получаемым с помощью метода обратной задачи рассеяния - одного из наиболее эффективных современных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений. В литературе описаны разнообразные псевдосферические поверхности вращения:

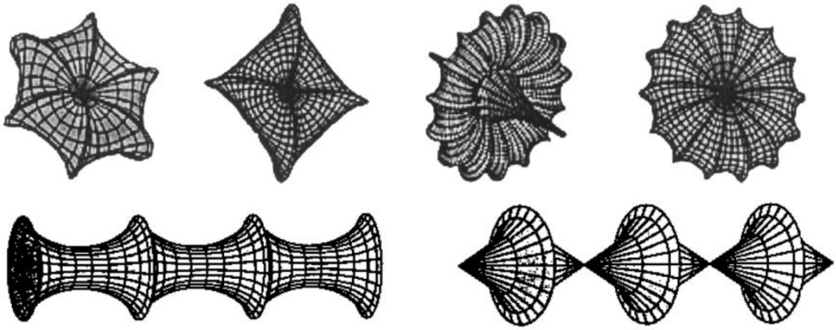


Рис.2. Поверхности Лобачевского, представленные в различных научных публикациях [23, 11]

Многие поверхности постоянной отрицательной кривизны названы именами математиков, которые их исследовали и описали. Существует также класс так называемых многосолитонных решений и соответствующее им бесконечное число псевдосферических поверхностей. На приведённых рисунках отчетливо видно, что поверхности постоянной отрицательной кривизны либо имеют край, либо замкнуты. Для дальнейших рассуждений рассмотрим наиболее известный вариант фрагмента поверхности Лобачевского - псевдосферу Бельтрами с постоянной отрицательной кривизной рис.3.

Видно, что псевдосфера Бельтрами является замкнутой, как бы конической в две стороны. Присмотревшись более внимательно к этой поверхности, можно заметить, что её название "псевдосфера", не совсем точно отражает её форму. Поверхность больше похожа на внутреннюю часть тора, поэтому её виду больше соответствовало бы название "псевдотор". У обычного двухмерного тора внутренняя поверхность имеет седлообразную форму с отрицательной кривизной, а внешняя - сфероподобную форму с положительной кривизной:

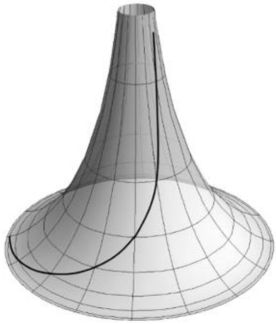


Рис.3. Псевдосфера Бельтрами (нижняя часть симметрична изображенной) [14]

Можно сказать, что в некоторой степени тор снаружи – это некое подобие сферического пространства Римана, а внутри - гиперболического пространства Лобачевского [11]. Если у тора "отрезать" поверхность положительной кривизны, то получится кусок поверхности отрицательной кривизны, отчасти напоминающий псевдосферу Бельтрами. Изгибая его далее, можно получить поверхность постоянной отрицательной кривизны - катеноид:

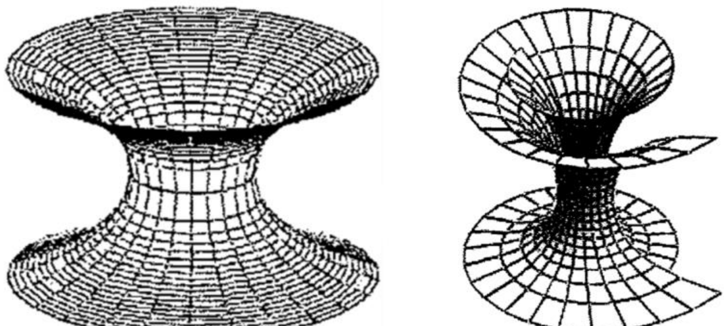


Рис.4. Катеноид (слева) напоминает внутреннюю поверхность тора. Поверхность Куена (справа) напоминает разрезанный и затем скрученный катеноид [11]

Как и классический тор, катеноид имеет конечную площадь поверхности. Однако её можно ещё более видоизменить, закрутив спирально рис.4 справа. Для этого полученный катеноид рассекаем ещё раз – поперёк витка и удлиняем витки в обе стороны, как бы наматывая их друг на друга. Полученная спираль называется поверхностью Куена.

С сохранением общности рассуждений можно утверждать, что на поверхности псевдосферы (в любом её мыслимом варианте) невозможно описать без самопересечения окружность диаметром, больше видимого "диаметра" псевдосферы. Следовательно, этот вариант плоскости и сама "воображаемая геометрия" Лобачевского вступают в противоречие с третьим постулатом Евклида.

В общем случае пространствами, принципиально отличающимися друг от друга, следует считать: плоское бесконечное пространство Евклида, сферическое замкнутое пространство Римана постоянной положительной кривизны, пространство Лобачевского постоянной отрицательной кривизны и неевклидовы бесконечные пространства *переменной* кривизны - гиперболическое, параболические, косинусные и тому подобные, на которых поведение третьего и пятого постулатов остаётся недоказанным. Такие бесконечные и бескрайние (либо с так называемым внешне - геометрическим краем) поверхности обязательно имеют области различной кривизны (положительной, отрицательной и их комбинации).

Выводы

В предисловии к статье Гильберта "Основания геометрии" Рашевский отметил: в наше время доказать V постулат пытаются только малообразованные дилетанты [7]. Не снимая с себя ответственности за предложенные доводы, отметим, что они не являются строгим доказательством как таковым, а лишь отражают наблюдения и сформировавшееся убеждение в том, что пространство Евклида и геометрия Евклида при всех её слабостях - первичны, являются основой любой иной геометрии, их фундаментом. При этом фундаментом самой геометрии Евклида является точка – "то, что не имеет частей". Как ни странно это звучит, но объект, имеющий нулевые размеры, является строительной частью всей математической реальности точно так же, как и физическая точка нулевых размеров является самой маленькой строительной частью всей физической реальности.

Как показано, на плоскости Римана существует неограниченное число точек, из которых мы не можем очертить окружность согласно постулату III, то есть, эта геометрия сама нарушает, отвергает один из исходных постулатов, и мы не можем его использовать. Тот факт, что где-то выполняется изменённый V постулат, для этой геометрии – не довод. Напротив, то, что постулат в формулировке Римана ведёт к другой геометрии – это довод в пользу истинности V постулата в формулировке Евклида.

Точно также и на поверхности псевдосферы геометрии Лобачевского существует неограниченное число точек, из которых невозможно очертить окружность согласно постулату III, то есть, эта геометрия, как и в выше рассмотренном случае, сама нарушает, отвергает один из исходных постулатов. И вывод в этом случае такой же: если мы исказим постулат Евклида – то сразу же выйдем за рамки его геометрии.

Постулаты Евклида и аксиомы Гильберта сформулированы для пространств постоянной кривизны, в которых пятый постулат в формулировке Евклида выполняется лишь тогда, когда справедлив третий постулат. Если же третий постулат не выполняется, то не выполняется и пятый постулат, а вместо геометрии Евклида мы получаем криволинейные геометрии Римана или Лобачевского.

То есть, третий постулат является *необходимым* и *достаточным* условием справедливости пятого постулата. Если существует и справедлив третий постулат, то пятый постулат имеет силу строго в формулировке Евклида, то есть является его следствием. И, напротив, если считать неверным пятый постулат в формулировке Евклида, то также становится неверным и его третий постулат. Это однозначное и неизбежное соответствие, и мы не имеем никаких оснований утверждать, что пятый постулат Евклида является независимым от его третьего постулата. Если мы исказим этот постулат, то сразу же выйдем за рамки его геометрии: другие постулаты, другая геометрия.

Кроме того, сама формулировка "является следствием" для V постулата в геометриях Римана и Лобачевского теряет смысл, поскольку то, чьим следствием он является, в них попросту отсутствует. Теорема о зависимости V постулата Евклида от первых трёх или, по меньшей мере, от третьего постулата доказана.

Парадоксы бесконечностей

Равномощные множества чисел

В литературе по космологии встречаются весьма любопытные рассуждения о тождественных бесконечностях. В частности делается очевидный ошибочный вывод о том, что в бесконечности часть может быть равна целому:

«множество натуральных чисел ($\mathbb{N}$) равномощно множествам целых чисел ($\mathbb{Z}$), чётных натуральных чисел, всех рациональных чисел ($\mathbb{Q}$), а отрезок числовой прямой ($\mathbb{I} = [0,1]$, континуум) оказывается в биективном соответствии со всей числовой прямой ($\mathbb{R}$), а также с $\boldsymbol{n}$-мерным евклидовым пространством ($\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$)» [3].

Несомненно, это противоречит нашей интуиции. Ведь четные числа явно составляют лишь половину всех целых чисел. Это справедливо для любой конечной совокупности чисел, но, как утверждается в цитате, не соответствует бесконечным рядам, для которых получается, что их количества равны. А утверждение в отношении отрезка буквально означает, что всем точкам отрезка соответствуют все точки всей евклидовой бесконечной плоскости.

В качестве одного из доказательств равномощности предлагается записать четные числа в виде бесконечного ряда, а под этим рядом написать их порядковые номера из натурального ряда чисел:

$$\begin{matrix} 2, 4, 6, 8, \ldots \\ 1, 2, 3, 4, \ldots \end{matrix} \qquad (1)$$

Здесь каждому четному числу соответствует один порядковый номер из натурального ряда чисел и наоборот. Значит, утверждается, число четных чисел равно числу всех чисел натурального ряда.

Но это неверно. Ошибка состоит в некорректном способе подсчета. Произведём подсчет другим, правильным способом. Возьмем ряд всех натуральных чисел и будем их считать самым обычным, привычным способом. Для этого каждое натуральное число будем класть в соответствующий ящик, и при этом называть его значение: один, два, три и так далее. Одновременно, по мере того, как нам будут встречаться эти числа, мы будем с каждым четным числом класть такую же цифру во второй ящик. И, для наглядности, с каждым нечётным – в третий ящик. Ну, и для ещё большей наглядности – для каждого пятого числа – в четвертый ящик.

Через некоторое время посмотрим, что у нас в ящиках? Через тысячу шагов, очевидно, в первом ящике будет 1 000 чисел. Во втором и третьем – по 500, а в четвертом – только 200. Ну, или в виде соотношения 10:5:5:2.

Продолжим раскладывать числа и вновь проверим содержимое ящиков теперь уже через 10 000 шагов. И в этот раз мы обнаружим, что количества чисел в ящиках соотносятся как 10:5:5:2. Нужно ли доказывать, что и через миллион, и через миллиард, и через гугл шагов количества чисел в ящиках будут соотноситься как 10:5:5:2?

Если мы последовательно синхронно считаем количества чисел в натуральном ряду, то мы найдём истинное соотношение их количеств. Однако говорить, что бесконечное число всех натуральных чисел больше, чем число всех четных или нечетных чисел неправильно. Эти числа образуют бесконечности и правильнее говорить об их мощности:

бесконечность всех натуральных чисел в два раза мощнее, чем бесконечности всех четных или нечетных чисел и в пять раз мощнее, чем бесконечность всех чисел, кратных пяти.

Кстати, также неправильно говорить в отношении бесконечностей, что часть может равняться целому. Правильно: мощность части бесконечности всегда меньше мощности всей бесконечности.

Рассмотрим приведённый выше пример в терминах мощностей. Примем без доказательства, что количество членов множества и его мощность – это разные, но схожие по смыслу понятия. Мы не можем сравнивать число членов множеств, по определению равных бесконечности, но мы можем сравнивать их мощности. Отношение мощностей M_1 и M_2 равномощных множеств всегда равно конечному числу:

$$c = \frac{M_1}{M_2} = const$$

В этом случае отношение множеств (1) для четных чисел запишется в виде:

$$\frac{2,4,6,8...}{1,2,3,4...} = c_{2n}$$

Запишем также и отношение множеств для нечетных чисел:

$$\frac{1,3,5,7...}{1,2,3,4...} = c_{2n+1}$$

Далее нам понадобится и такое тождественное отношение:

$$\frac{1,2,3,4...}{1,2,3,4...} = c_n = 1$$

Это равенство очевидно, поскольку числитель равен знаменателю. Теперь просуммируем два отношения мощностей:

$$c_{2n} + c_{2n+1} = \frac{2,4,6,8...}{1,2,3,4...} + \frac{1,3,5,7...}{1,2,3,4...} = \frac{1,3,5,7... + 2,4,6,8...}{1,2,3,4...}$$

Очевидно, что последняя дробь содержит в числителе все целые натуральные числа:

$$c_{2n} + c_{2n+1} = \frac{1,3,5,7... + 2,4,6,8...}{1,2,3,4...} = \frac{1,2,3,4,5,6,7,8...}{1,2,3,4...} \equiv c_n = 1,$$

поэтому тождественно равна единице.

Это определённо означает, что мощности множеств всех натуральных чисел и суммы множеств всех четных и нечетных чисел равны. Но это также означает и равенство их бесконечного числа членов. Очевидно, что множества четных и нечетных чисел равномощны, поэтому, разделив полученное равенство на c_n, получим:

$$\frac{c_{2n}}{c_n} + \frac{c_{2n+1}}{c_n} = \frac{1}{c_n} = 1$$

Из равенства следует, что мощности четных и нечётных чисел в два раза «слабее» мощности всех натуральных чисел:

$$\frac{c_{2n}}{c_n} = \frac{c_{2n+1}}{c_n} = \frac{1}{2}$$

Отметим также без доказательств, что любые действия над каждым членом множества не изменяют мощности множества:

$$c_f(a_i) = f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)... \equiv c(a_i)$$

Из этого непосредственно следует, что решающее значение имеет способ, каким получено множество. Например, множество всех четных чисел может быть получено удалением из множества всех натуральных чисел нечётных или умножением на 2 каждого члена множества всех натуральных чисел:

$$\text{М}(1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots) \equiv \text{М}(1\times 2,\ 2\times 2,\ 3\times 2,\ 4\times 2\ldots)$$

Казалось бы, последнее выражение является точной копией множества всех четных чисел М(2, 4, 6, 8…). Но это ошибочно, поскольку любые действия над всеми (или отдельными) членами множества не изменяют их полного количества и, соответственно, мощности. Поэтому справедливо (знак множества М опускаем):

$$\frac{2,4,6,8...}{1,2,3,4...} = \frac{c_{2n}}{c_n} = \frac{2,4,6,8...}{1,2,3,4...} = \frac{1}{2} \neq \frac{c_{n\times 2}}{c_n} =$$

$$\frac{(1,2,3,4...)\times 2}{1,2,3,4...} = \frac{2_{2\times},4_{2\times},6_{2\times},8_{2\times}...}{1,2,3,4...} \equiv 1$$

Хотя оба множества в числителях в обеих строках выглядят тождественно, на самом деле это разные множества, имеющие разную мощность.

В книге [5, с.282] предлагается вести подсчет нечетных чисел, предварительно переставив их в ряду:

"В бесконечной вселенной коэффициент объема можно определить как долю, занятую областями данного типа. Но это определение приводит к неоднозначности. Чтобы проиллюстрировать природу проблемы, зададимся вопросом: какова доля нечетных чисел среди целых?

Четные и нечетные числа чередуются в последовательности 1, 2, 3, 4, 5, и можно подумать, что ответом, очевидно, будет половина. Однако целые числа можно упорядочить другим способом. Например, так: 1, 2, 4, 3, 6, 8 ... Эта последовательность по-прежнему включает все целые числа, но теперь за каждым нечетным числом следует два четных, и кажется, что только треть целых чисел являются нечетными"

Здесь нам отчетливо видна некорректность и противоречивость такой модификации числового ряда, которая строго последовательно и логично легко доводится до абсурда. Для этого все нечетные числа поместим в самый конец бесконечной последовательности. Теперь при поверхностном анализе последовательности мы обнаружим, что в ней нечетных чисел нет вообще. Конечно, мы догадываемся, что все они где-то дальше, но, как бы долго мы ни просматривали последовательность, мы никогда не встретим в ней ни одного нечетного числа. Однако итог явно абсурден: нечетные числа точно есть, но мы их почему-то не пересчитываем. Причина заключается просто в выборе метода подсчета: игнорирование длины ряда. Мы же сами каким-то образом перенесли нечетные числа в конец ряда? Ну, так и нумеровать тогда следует весь ряд. Это же относится и к предложенному выше методу упорядочивания. Каким-то образом эти числа перетасованы? Вплоть до последнего. Ну, так и считать следует соответственно – до последнего числа. Если же числа перетасовываются в процессе счета, тогда "временно вынутые из ряда нечетные числа" все время будут где-то скапливаться. Трудно будет не заметить это бесконечно большое хранилище нечетных чисел.

С другой стороны, мы можем проделать то же самое и с четными числами, получив в результате, что их в общем ряду только треть. Иначе говоря, один и тот же метод показывает, что среди целых чисел нечетных одновременно только треть и только две трети. Понятно, что методика, дающая два взаимоисключающих результата не вызывает доверия.

Такие методики пересчета, отождествления всегда содержат плохо скрытую подмену понятий. Например, с рядом натуральных чисел отождествляется ряд степеней 10^1, 10^2, 10^3 ... 10^n... и так далее. Таким же образом устанавливается взаимно однозначное соответствие и между множеством натуральных чисел и множеством всех квадратов натуральных чисел 1^2, 2^2, 3^2, … n^2… и так далее. Но принять такое отождествление нет никаких оснований. Нужно просто обратить внимание на то, что же именно отождествляется. В обоих приведенных примера сразу же можно заметить присутствие члена натурального ряда. Понятно, что отождествляются не *значения* членов ряда, а их порядковые номера, которые самым наглядным образом обозначены в каждом из членов рядов. До начала отождествления каждый член ряда уже имеет свой порядковый натуральный номер, а значение самого члена ряда не имеет никакого смысла. Это могут быть и летучие обезьяны с соответствующей биркой на шее, и протоны в бесконечной Вселенной, которые ещё только предстоит пометить соответствующим номером, и даже множество миров Эверетта.

В связи с хитростями нумерации нередко вспоминают математика Кантора, который доказал, что число точек на отрезке прямой сосчитать никаким способом нельзя. Утверждается, что их нельзя перенумеровать с помощью бесконечного ряда натуральных чисел, приписывая каждой точке свой номер, в каком бы порядке мы ни выбирали эти точки. Всегда останется хотя бы одна точка, на которую не хватит номера!

Перенумеровать или, тождественно, пересчитать бесконечное количество чего-либо, в том числе, сосчитать точки отрезка, действительно, невозможно физически. Однако приводимое затем доказательство, как правило, начинается со слов: «Представим, что вопреки нашему утверждению кому-то удалось перенумеровать точки этого отрезка», после чего приводятся хитрые комбинации с нумерацией. Но здесь следует напомнить фундаментальный принцип классической логики и классической математики, который постулирует полное отрицание актуальной бесконечности: «Infinitum Actu Non Datur» (Аристотель) – «актуальная бесконечность не существует». Принцип утверждает потенциальный, т.е. принципиально незавершаемый характер бесконечности множества. Актуальная, то есть, пересчитанная бесконечность лишена смысла. Бесконечностью может считаться лишь потенциальная бесконечность, завершить счет членов которой невозможно. Поэтому приводимое доказательство на этих словах можно и прервать – оно некорректно с самого начала. Впрочем, в этом вопросе особое мнение, которое тоже следует признать некорректным, приписывается Давиду Гильберту. По мнению немецкого математика, одного из величайших умов своего времени, главное различие между актуальной и потенциальной бесконечностью заключается в следующем. Потенциально бесконечное есть всегда нечто возрастающее и имеющее пределом бесконечность, тогда как актуальная бесконечность – это завершённое целое, в действительности содержащее бесконечное число предметов [10]. Вероятно, в качестве примера можно привести ряд из обратных степеней двойки. Число членов этого ряда равно бесконечности, но каждый его член не возрастает, а, наоборот, стремится к нулю. Тем не менее, целым можно признать сумму ряда, которая в точности равна 2. Здесь присутствует бесконечный предел, но который не равен бесконечности, а, напротив, является завершенным целым – 2, поэтому такой ряд должен быть одновременно и потенциальной и актуальной бесконечностью. Но сравнение суммы ряда с количеством его членов явно лишено смысла.

Кстати, можно рассмотреть довольно оригинальный способ некоторого *подобия* пересчета *всех* членов бесконечной последовательности. Вполне корректно можно каждому члену такой последовательности присвоить свой собственный, отличный от других номер. Более того, будут однозначно определены номера как первого члена последовательности, так и последнего. Правда, все эти номера не будут натуральными целыми числами. По методике Зенона присвоим первому члену бесконечной последовательности номер 2. Второму – 1. Третьему – 1/2 и так далее, присваивая каждому следующему члену последовательности номер, равный половине номера предыдущего члена. Легко обнаружить, что номером *последнего* члена *бесконечной* последовательности будет точно 0!

Несчетность континуума

Есть один весьма любопытный пример подсчета количества точек на отрезке линии. Нетрудно догадаться, что и в этом примере использованная методика счета ошибочна и ведет к ошибочному выводу. Несложное доказательство содержит не очень сильно скрытую подмену понятий. Итак:

"Теперь уже несложно доказать, что множество всех точек на прямой линии несчетно. Вместо этого множества можно говорить о множестве всех действительных чисел, так как каждой точке прямой соответствует действительное число и обратно. Каждое действительное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби вида

$\alpha,\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n...$" [6, с.73].

Как видим, ряд знаков имеет бесконечное и, предположим, что так же считает и автор доказательства, счетное количество знаков.

"Предположим, что нам удалось каким-то образом перенумеровать все действительные числа. Чтобы доказать, что это предположение неверно, достаточно построить хоть одно незанумерованное число. ... поступим следующим образом.

Сначала напишем нуль и поставим после него запятую. Потом возьмем число, получившее первый номер, и посмотрим на его первый десятичный знак после запятой (то есть на число десятых)" [6, с.73].

Для определенности отметим, что поиск незанумерованного числа производится на отдельном интервале всех действительных чисел [0, 1]. Сначала как на неточность в этом рассуждении, как и в предыдущем доказательстве, сразу же укажем на очевидное, но, похоже, незамеченное обстоятельство: у второго числа вторая цифра тоже будет 0. И у третьего. И у четвертого. И у числа, занимающего бесконечно большую позицию. На словах это, возможно, не совсем ясно, поэтому покажем это на "виновнике торжества" – на оцифрованном отрезке:

Рис.5. Оцифрованный отрезок, отдельный интервал всех действительных чисел

На рисунке видно, что вторая цифра будет единицей только после точки отрезка 0,1. На интервале от 0 до 0,1 содержится счетное (пока оспариваемое) количество точек. Во всяком случае, это не одна, не миллион и даже не гугл точек, равный 10^{100}, а в бесконечное число раз больше. Следовательно, искомое число пока находится вблизи нулевой точки, в самом начале отрезка.

"Если эта цифра отлична от 1, то в числе, которое мы пишем, поставим после запятой 1, а если эта цифра равна 1, то поставим после запятой 2" [6, с.73].

Следовательно, в искомом числе после запятой первой будет 2. То есть, число будет 0,2. Сразу же по рисунку заметим, что эта точка на отрезке есть – это точка 0,2.

"Затем перейдем к числу, получившему второй номер, и посмотрим на его вторую цифру после запятой. Снова если эта цифра отлична от единицы, то в числе, которое мы пишем, поставим на месте сотых цифру 1, если же эта цифра является единицей, то поставим цифру 2" [6, с.73].

Как и в предыдущем случае, вторым знаком опять будет ноль, поскольку точки расположены рядом и их номера различаются лишь в очень далекой позиции после нуля. Следовательно, и вторая цифра искомого числа будет 2. То есть, это будет число 0,22. По рисунку видно, что и эта точка на отрезке имеется. Она находится правее точки 0,2 и отстоит от неё примерно на 1/5 отрезка от 0,2 до 0,3.

"Точно так же будем действовать и дальше, каждый раз обращая внимание лишь на n-ю цифру числа, получившего n-й номер. В результате мы выпишем некоторое число, например

N=0,1121211. . . [6, с.73-74].

Но мы уже можем заметить, что такое число не получается. А получится число 0,22222..., в котором цифра 1 появится очень и очень не скоро. И эта цифра также будет тиражироваться многократно. В конечном счете, формируемое число примет вид:

N=0,2222222…1111111…2222222...1111111

Кстати, можно догадаться по алгоритму, что число будет в основном состоять из двоек, поскольку из 10 цифр единица, которую помечаем двойкой, только одна.

"Ясно, что это число не получило никакого номера: в первом десятичном знаке оно отличается от числа с номером 1, во втором — от числа с номером 2, . . ., в n-м — от числа с номером n и т. д." [6, с.74].

Верно это только отчасти, поскольку в целом неверно. Указанные совпадения, действительно, на первом участке отрезка отсутствуют. Однако это найденное число совпадает в первом знаке с множеством чисел, соответствующих другой точке отрезка. Первым и вторым знаками оно соответствует множеству чисел следующих точек отрезка. Первым, вторым и третьим – следующему множеству точек отрезка. И так далее – до бесконечности!

"Чтобы читателю стало яснее, как выписывается число, не получившее номера, предположим, что при выбранной нумерации первые пять чисел имеют следующий вид:

4,27364...

—1,31226...

7,95471...

0,62419...

8,56280... " [6, с.74].

Здесь очевидна неточность, поскольку таких чисел при выбранной нумерации на интервале [0, 1] не будет никогда. Однако эту неточность оставим без критики, поскольку пояснение вполне верно описывает принцип формирования искомого числа.

"Тогда число, не получившее номера, будет начинаться со следующих десятичных знаков:

0,12121 . . .

Разумеется, не только это, но и многие другие числа не получили номеров (мы могли бы заменять все цифры, кроме 2, на 2, а цифру 2 на 7 или выбрать еще какое-нибудь правило). Но нам достаточно существования одного-единственного числа, не получившего номера, чтобы опровергнуть гипотезу о возможности нумерации всех действительных чисел" [6, с.74].

Еще раз отметим, что доказательство на самом деле рассматривает бесконечно малую часть всех действительных чисел – на интервале [0, 1]. Предложенный способ просмотра чисел некорректен. При таком способе *все просматриваемые* действительные числа на этом интервале реально будут сгруппированы возле нулевой точки. И ожидаемого числа 0,12121, приведенного в качестве примера, получено не будет. А будет образовано указанное выше число N из бесконечного ряда двоек.

Следовательно, в этом отношении доказательство не может достичь успеха, поскольку полученное число точно имеется на близлежащем интервале. Действительно, на ближайшем интервале от предполагаемо пропущенной точки, например, от 0,222 до 0,223 присутствуют *все возможные* комбинации знаков после 0,222 и, в том числе, знаков указанного числа N.

Конечно, в доказательстве явно не указана последовательность номеров чисел. Но под "нам удалось" тоже явно никто не указан. Эти самые "нам" могли перенумеровать числа интервала подряд: сначала все возле нуля, затем они дошли до 0,1 и так далее. Более того, существует простой способ, наглядно доказывающий счетность *всех мыслимых* видов чисел. Но сначала давайте рассмотрим некоторые возможные способы подсчета.

Задача об "Отеле Гильберта"

Судя по всему, вопросы бесконечных множеств сложны не только для рядовых математиков. Иной раз в слабом их понимании можно заподозрить и величайших специалистов в этой области. Рассмотрим рассказ, который, как считается, предложил Гильберт где-то в третьем десятилетии 20 века [19, 20, 21, 6, с.70-71].

Представим себе гостиницу с бесконечным числом комнат. Комнаты пронумерованы натуральными числами от 1 до ∞. Однажды в гостиницу вошел человек и попросил снять комнату. К сожалению, для нового гостя не нашлось комнаты, так как отель был *полностью заполнен* бесконечным числом гостей, и не было ни одного свободного номера. Как предоставить новому гостю свободную комнату, не выселяя никого из постояльцев?

Несмотря на то, что задача явно говорит, что *все номера заняты*, утверждается, что есть возможность выделить сколько угодно свободных комнат. Для этого необходимо переселить постояльца из первой комнату во вторую, постояльца из второй комнаты в третью и так далее. То есть, каждого постояльца из комнаты с номером n необходимо переселить в комнату с номером n+1, $n \rightarrow n+1$. В результате этого освобождается комната с номером один, и в неё можно поселить нового гостя. Здесь явно подразумевается, что переселение выселением не является.

Но это решение совершенно очевидно ошибочно. По условиям задачи определённо сказано, что свободных номеров нет! Следовательно, данный «парадокс» Гильберта является псевдо парадоксом [20], поскольку вместо подселения производится выселение. В предложенном решении производится подмена понятий. Состояние, стационарное, неизменное – заполненность всех номеров жильцами – подменяется процессом, динамическим, движением – переселением постояльцев из одного номера в другой. Во-первых, этот процесс может длиться вечность, во-вторых, в случае даже одного нового гостя, на всём протяжении процесса переселений один из постояльцев всегда будет без гостиничного номера, то есть, будет сидеть в коридоре, что является нарушением условий решения задачи. Иначе говоря, все постояльцы просто *поделились* своим временем проживания с новым жильцом как в пословице "с миру - по нитке".

За большим числом постояльцев как-то незаметно прячется суть задачи, математической процедурой, манипуляцией с бесконечностями подменяется само содержание исходного тезиса: подселение в заполненный отель дополнительных постояльцев. Показать эту подмену можно, если взять противоположный предельный вариант: в отеле всего один номер, и он занят. Для того чтобы поселить нового, прежнего постояльца временно выселяют буквально в коридор под предлогом переселения. Здесь, как видим, и обнаруживается скрытая подмена понятий переселения и выселения. Вновь пришедшего гостя селят в освободившийся номер. Но прежнего постояльца тоже надо куда-то поместить. Поэтому вновь заселенного гостя опять выселяют, а на его место селят прежнего постояльца. И так по кругу. В конечном счете, каждый из них в номере проживает только половину времени, а вторую – на стуле в коридоре.

В таком варианте задача принципиально ничем не отличается от задачи с бесконечным числом комнат. Добавим ещё одну комнату и будем по кругу переселять теперь уже троих постояльцев. Можно добавить и четверную комнату и производить всё ту же процедуру "переселения-выселения". Дойдя до бесконечности, мы и получим парадокс отеля в исходном варианте. Однако в его минимальной конфигурации мы явно обнаруживаем: постояльцы, по сути, часть времени проводят на стуле возле комнаты. При бесконечном числе комнат и конечном числе новых постояльцев это время стремится к нулю. Отличие только в этом. Если же число постояльцев растет, как предлагается в расширенных версиях парадокса, то и время "на стуле около комнаты" также будет расти вплоть до той же исходной величины – половину времени проживания. Рассмотренные решения «парадоксов» нарушают главный принцип отелей: постоялец должен вселиться и жить в нем, пока сам не решит его покинуть.

Несостоявшаяся перепись

Парадокс отеля оказался настолько интересным и показательным, что он получил дальнейшее развитие, которое описано, например, в виде шутливого научно-фантастического рассказа от имени вымышленного персонажа:

"Из треста космических гостиниц пришел приказ составить заранее все возможные варианты заполнения номеров. Эти варианты потребовали представить в виде таблицы, каждая строка которой изображала бы один из вариантов. При этом заполненные номера должны были изображаться единицами, а пустые нулями. Например, вариант

101010101010...

означал, что все нечетные номера заняты, а все четные пустые, вариант

11111111111...

означал заполнение всей гостиницы, а вариант

000000000000...

означал полный финансовый крах — все номера пустовали" [6, с.71].

Это является продолжением рассказа об "Отеле Гильберта", для случая бесконечного числа отелей с бесконечным числом номеров и бесконечным множеством гостей. В продолжении рассмотрен еще один из вероятных парадоксов, возникающих в таком тресте отелей. Итак, форма отчета определена. Далее определяется способ его составления:

"Директор был перегружен работой и поэтому придумал простой выход из положения. Каждой дежурной по этажу было поручено составить столько вариантов заполнения, сколько номеров было в ее ведении. При этом были приняты меры, чтобы варианты не повторялись. Через несколько дней списки были представлены директору, и он объединил их в один список" [6, с.71].

К сожалению, способ описан недостаточно четко, поэтому с учетом предыдущей информации из книги проясним некоторые детали. На каждом этаже у дежурной должно быть бесконечное, счетное в общем случае, количество номеров. В противном случае вариантов у неё будет конечное количество, то есть, каждое двоичное число будет иметь вполне определенное число знаков. Например, 10^{165} нулей и единиц. В этом случае задача имеет однозначное решение при бесконечном количестве гостиниц и этажей, поскольку любая счетная (потенциальная) бесконечность перекрывает любое конечное число вариантов.

Но, с другой стороны, если на этаже счетное количество номеров, то и в этом случае будет получен список вариантов, содержащий все возможные комбинации из бесконечного (счетного) числа нулей и единиц. То есть, и в этом случае задача решается однозначно.

"— Могу ручаться, что список неполон. Я берусь указать вариант, который наверняка пропущен" [6, с.71].

Вполне ожидаема подмена понятий, но её следует показать непосредственно, явно.

"Мы заключили пари. Чтобы выиграть его, я предложил прибить каждый вариант на дверь того номера, которому он соответствовал..." [6, с.72].

Сразу же возразим. Напомним читателю, что вариантов составлено столько, сколько номеров на этаже, а не в гостинице целиком. Впрочем, это не имеет принципиального значения, поэтому просто отбросим варианты других этажей, поскольку и одного этажа окажется вполне достаточно.

"А потом я поступил очень просто. Подойдя к двери первого номера, я увидел, что соответствующий вариант начинается с цифры 0. Немедленно в блокноте появилась цифра 1; это и была первая цифра варианта, который мне хотелось составить" [6, с.72].

Здесь заметна некоторая неопределенность. Гостиниц – бесконечное число (счетное). Можно также предположить, что, соответственно, этажей и комнат на каждом этаже также счетное (потенциально бесконечное) множество. В этом случае смысл первого номера становится неясен. Нумерация ведётся сквозная? Или в каждой гостинице есть свой первый номер? С этажами тоже не совсем ясно, хотя и проще, поскольку по принятой практике первая цифра номера комнаты равна номеру этажа. И вновь примем решение в пользу рассказчика: отбросим все номера кроме номеров на единственном этаже единственной гостиницы, а в номере комнаты отбросим цифры этажа. Следовательно, на каждом этаже каждой гостиницы будет комната с номером 1.

"Когда я подошел к двери второго номера, то первая цифра соответствующего варианта меня не интересовала, ведь первая цифра моего варианта была уже написана. Поэтому все внимание было обращено на вторую цифру. Увидев, что эта цифра 1, я записал в своем блокноте цифру 0. Точно так же, обнаружив, что третья цифра варианта, прибитого к двери третьего номера, тоже 1, я записал в блокноте цифру 0. Вообще, если я обнаруживал, что п-я цифра n-го варианта есть 0, то писал в своем блокноте на п-и месте цифру 1, если же n-я цифра n-го варианта была 1, то я писал у себя 0. Когда я обошел все номера гостиницы, то в блокноте оказалась записанной последовательность нулей и единиц" [6, с.72].

Методика понятна и разумна, но верные ли выводы из неё делает рассказчик?

"— Вот, полюбуйтесь на пропущенный вариант.

— А откуда известно, что он пропущен?

— Он не может быть первым, так как отличается от него первой цифрой, не может быть вторым, так как отличается от него второй цифрой, третьим, так как отличается от него третьей цифрой, и вообще n-м, так как отличается от него n-й цифрой" [6, с.72].

Это неверный вывод. В его списке номер начинается, например, с цифры 0. Но это всего-навсего первый разряд бинарного числа бесконечной длины. Можно уверенно заявить, что вся бесконечная монотонная последовательность нулей и единиц в точности содержит половину, начинающихся с нуля. Например, пятизначное число:

00000, 00001, 00010, 00011, 00100 и так далее

Следовательно, если номер первой комнаты начинается с нуля, то номер второй комнаты будет начинаться тоже с нуля. И так на бесконечном количестве дверей. Поэтому в блокноте вторая цифра также будет нулем. И третья. И четвертая. И так до бесконечности. Счетной.

Но как же так?! Получается, что все комнаты будут иметь один и тот же нулевой номера?! Нет, разумеется. Просто длина последовательности нулей и единиц такова, что прочитать последнюю цифру рассказчику не удастся никогда. Вернее, за бесконечное (счетное) количество времени.

"... стало ясно, что какое бы счетное множество вариантов ни взять, всегда найдется вариант, не вошедший в это множество... А это и значит, что множество всех вариантов заполнения гостиницы несчетно..." [6, с.72].

Таким образом, вывод о несчетности вариантов явно ошибочен. Похоже, что и в тресте космических гостиниц тоже не нашлось грамотного программиста или математика, которые могли бы предостеречь руководство от такого тривиального, бессмысленного задания. Бесконечное (счетное) число вариантов бинарных чисел даёт весь натуральный бинарный ряд чисел. Без пропусков и повторов. Каждый дежурный по этажу должен был составить все варианты бесконечной последовательности бинарных чисел. Неважно, что дежурных много, а гостиниц – вообще бесконечное (счетное) количество. Каждый из дежурных предоставить в точности один и тот же список.

Кстати, не проходит и хитрость с отбрасыванием ведущих нулей, то есть:

0, 1, 10, 11, 110, 111, 1110, 1111, 11110 и так далее,

поскольку в этом случае у второй комнаты в номере отсутствует вторая цифра, у третьей – третья, у четвертой – четвертая и так далее.

Счетность всех мыслимых видов чисел

Теперь еще раз вернемся к счетности континуума. Действительные числа являются лишь частью ряда возможных чисел, включающих в себя вещественные, комплексные, кватернионы, гиперкомплексные, поличисла (коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные числа), разнообразные многомерные и любые иные виды чисел. Здесь нас не должны интересовать алгебры этих чисел и их свойства. Единственное не обязательное условие – это конечная длина записи числа. То есть, запись числа в виде бесконечного ряда коэффициентов мы пока оставим без внимания.

Все мыслимые числа в общем виде можно записать, например, в следующем виде

$$a = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 ... + \alpha_n C_n + ...$$

где

α – любое вещественное число;

C – любой индекс, например, мнимая единица i.

Например, число может иметь вид 2,71828... – действительное число, или 3+2i - комплексное число, или 5+2i+3j+8k – кватернион. Правильно организованный способ подсчета этих чисел позволяет показать счетность всего их ряда. Вообще-то, такой результат является простым следствием принятого способа подсчета. На классический вопрос "сколько будет дважды два?" известен шутливый ответ: а сколько надо? По большому счету, всё сводится к спору о том, какой способ подсчета лучше или правильнее. Рассмотрим следующий способ.

Возьмем два натуральных числа m и n, изменяющиеся от 0 до бесконечности. Запишем с их помощью некоторое число в виде n+[1-{0,m}] и начнем перебирать, подсчитывать все получившиеся числа. Ряд чисел будет иметь вид:

0,0+0,9+0,8...+0,1+0,90+0,89+0,88...+0,81+0,80+0,79 ... +0,12121...
1,0+1,9+1,8...+1,1+1,90+1,89+1,88...+1,81+1,80+1,79 ... +1,12121...
2,0+2,9+2,8...+2,1+2,90+2,89+2,88...+2,81+2,80+2,79 ... +2,71828...
3,0+3,9+3,8...+3,1+3,90+3,89+3,88...+3,81+3,80+3,79 ... +3,14159...
4,0+4,9+4,8...+4,1+4,90+4,89+4,88...+4,81+4,80+4,79 ... +4,12121...

Знак плюс означает не суммирование, а используется как разделитель между числами. В связи с повторами, поскольку числа вида 0,1+0,10+0,100+0,1000 в использованном алгоритме считаются разными, общее количество чисел, как показала проверка, оказывается больше примерно на 10%. Конечно, мы можем повторяющиеся числа пропускать, не считать, но 10% погоды не делают. Если изобразить расположение чисел на графике, то график будет иметь вид пилы.

Как видим, в первую строку попадают все числа от нуля до 1, то есть, [0, 1), во вторую – от 1 до 2, то есть, [1, 2), в третью от 2 до 3, то есть, [2, 3) и так далее. Очевидно, что полученная угловая плоскость из чисел будет содержать в себе все числа от нуля до бесконечности.

Для большей общности можно добавить еще одно условие: четные числа n будем делить на 2 и полученное число записывать согласно выбранному виду. Для следующего нечетного числа n запишем то же самое число, только со знаком минус. Очевидно, что в такой ряд легко включить и все вещественные и действительные, комплексные числа и даже кватернионы. С вещественными и действительными, видимо, неясностей нет, поэтому покажем, как в этом ряду поместились, например, кватернионы.

Для их формирования воспользуемся обратным методом Кантора [6, с.77]. Как известно, он формирует новое число из двух следующим образом:

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

$$y = 0,\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

$$z = 0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3...\alpha_n\beta_n...$$

У двух рациональных чисел берутся цифры после запятой и поочередно вписываются после запятой третьего числа. Мы проделаем обратную операцию, сформируем из одного числа несколько коэффициентов, например, для кватерниона. Возьмем из полученного ряда какое-либо число z и будем рассматривать его как составное, отбросив запятую:

$$z = [\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\alpha_3\beta_3\gamma_3\delta_3\alpha_4\beta_4\gamma_4\delta_4]...$$

Очевидно, что все составляющие число цифры гарантируют любую возможную комбинацию, поскольку ряд чисел z бесконечен. Теперь составим из одноименных цифр новое число, кватернион:

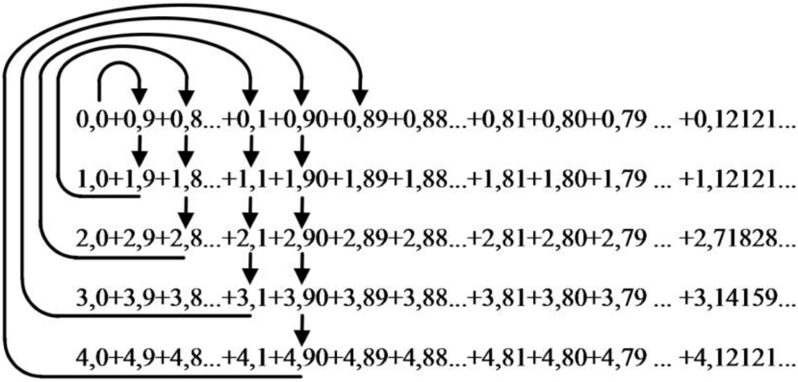
$$q = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 i + \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 j + \delta_1\delta_2\delta_3\delta_4 k$$

Здесь в каждом коэффициенте показаны только четыре цифры, но, очевидно, их может быть любое количество. Также очевидно, что и самих коэффициентов может быть любое число: один – действительное или вещественное число, два – комплексное число и так далее.

Понятно, что полученный ряд *всех* возможных чисел является счетным, каждое из чисел имеет свой индивидуальный *натуральный* порядковый номер. Среди этих чисел обязательно окажутся и число e = 2,71828..., и π = 3,14159..., и константа пропорциональности C = 0,76422... Ландау – Рамануджана, и постоянная тонкой структуры. Счетность ряда обеспечивается использованием метода квадратов, предложенного математиком-филателистом из рассказа об отелях с бесконечным числом номеров [6, с.56].

Метод мы будем использовать в точности, как в рассказе, поэтому числа из приведенной выше таблицы расположатся друг за другом и получат соответствующие номера.

Итак, начнем их нумеровать. Сначала ставим номер для 0. Затем сделав дугу, переходим к числу справа от нуля, далее вниз, во вторую строку и влево. После этого вновь делаем дугу и попадаем теперь уже на третье число после нуля, после чего опять описываем дугу, переходя от числа к числу:



Порядок их подсчета соответствует правилу нумерации членов ряда, то есть, каждое число из таблицы получит *свой индивидуальный натуральный порядковый номер*, будет пронумеровано. Начало последовательности чисел будет в данном случае выглядеть так:

0,0+0,9+1,9+1,0+0,8+1,8+2,8+2,9+2,0...+0,1+1,1+2,1+3,1+3,8+...

Наша траектория обхода чисел будет напоминать спираль Архимеда, правда, спираль квадратную. Мы последовательно будем попадать на все числа, постепенно удаляясь от нуля всё дальше и дальше. Каким бы ни было количество всех действительных чисел, наше движение не пропустит ни одного из них, и каждое из них получит свой индивидуальный натуральный номер.

Откликнувшись на сноску в книге на стр.77: "Гм, гм, сколько же времени он затратил?", отведем по методу Зенона на создание каждого числа в таблице и его последующую нумерацию время в часах: 2^{-n}, то есть на всю бесконечную процедуру потребуется ровно 2 часа. Таким образом, можно сделать вывод: континуум является счетным, причем за конечное математическое время.

Равномощность отрезка и квадрата

К таким же ошибочным утверждениям следует отнести и известное доказательство Кантора равной мощности точек в прямом отрезке и квадрата со стороной, равной этому отрезку. На самом деле мощность множества точек квадрата на отрезке имеет более высокий порядок, чем мощность множества точек отрезка. То есть, больше в бесконечное число раз.

Есть наглядный и предельно простой способ показать это: нужно отрезок просто наложить на квадрат. Под отрезком окажутся все тождественные ему точки квадрата. Остальные точки квадрата образуют отдельное бесконечное множество точек, очевидно, большей мощности. Если же отрезок длиннее стороны квадрата, то, казалось бы, можно найти такой квадрат, который будет содержать меньше точке, чем эта линия:

"Разумеется, можно разломать прямую линию на отрезки, длина которых равна стороне квадрата, и после этого каждый отрезок поместить в квадрат так, чтобы они не пересекались друг с другом" [6, с.59].

Это верно, но ломать линию совсем не обязательно. В доказательстве Кантора длина линии равна стороне квадрата. Однако, может быть, разлом линии в цитате предложен для того, чтобы завуалировать, спрятать фактическое опровержение этого доказательства? Действительно, если наложить отрезок на квадрат, то их точки будут отождествлены, причем, вопреки Кантору, у квадрата точек окажется несопоставимо больше, чем у линии. Как бы то ни было, в цитате отчетливо просматривается мысль, что линия содержит меньше точек, чем квадрат. По аналогии с таким разбиением возникло и обратное предположение:

"Но вдруг и квадрат можно как-то разбить на части, а потом эти части положить на прямую, чтобы они не задевали друг друга?" [6, с.59].

Алгебраически с учетом равной метрики, как показано выше, это возможно: вытянуть квадрат в линию. Такой способ совмещения, алгебраический сразу же высвечивает противоречивость решения Кантора. К сожалению, автор цитаты не стал развивать эту идею дальше.

Для сравнения двух множеств точек следует попытаться установить однозначное соответствие между этими точками, то есть, показать, что точки обоих этих множеств можно объединить, скажем, в пары (a, b) такие, что каждый элемент, каждая точка a принадлежит линии, а каждый элемент, точка b – квадрату, причем каждый из элементов a и b попал только в одну пару.

Согласно Кантору два бесконечных множества – точки линии и квадрата – имеют одинаковое количество элементов, если между этими элементами можно установить указанное однозначное соответствие. В математике обычно говорят о мощности множества, подразумевая под нею количество его элементов. Следовательно, отрезок и квадрат, построенный на нем, по Кантору имеют одинаковую мощность. Для доказательства этого он использует следующий метод. В системе координат x0y простроен квадрат ABCD, причем точка A совпала с началом координат, а точка B лежит на оси x. Не всякий способ позволяет установить взаимное однозначное соответствие между точками квадрата и отрезка:

"Проектирование точек квадрата на отрезок AB здесь не помогает, ведь при проектировании в одну точку отрезка перейдет бесконечное множество точек квадрата (например, в точку A — все точки отрезка DA)" [6, с.77].

Однако такое обоснование нас, разумеется, устроить не может, поскольку это решение верное, но оно все-таки отбрасывается. Координаты каждой точки квадрата можно представить в мнемоническом виде:

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$
$$y = 0,\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

В этих записях каждый символ α, β представляет собой какую-либо цифру из 0...9. То есть, x и y – это просто два дробных числа, меньшие единицы. Здесь следует, кстати, выразить недоумение по поводу отождествления чисел вида 0,50000... и 0,499999....

"...например, 0,500000... и 0,49999999...— это одно и то же число. Для определенности будем пользоваться записью с нулями" [6, с.73].

В частности, вопрос: отождествляются только такие числа? А, например, числа 0,550000... и 0,549999... не отождествляются по такому же принципу? Это правило, собственно говоря, не выдумка. Например, его использует офисная программа MS Excel, правда, с противоположной "определенностью". Там любое целое число в одном из представлений так и записывается: с множеством девяток в конце. Но в нашем случае мы рассматриваем числа в их *абсолютном* смысле. Поэтому число 0,5000...1 и число 0,5, число 0,4999999... или даже 0,4999...9998 – это совершенно *разные* числа. Если же вводить указанное правило (округление), то следовало бы и здесь дать веские обоснования, почему такой участи избежали, например, числа 0,549999... или 0,22229999..... Чем они кардинально отличаются? Если же правило распространить и на них, то сразу же образуется счетная бесконечность чисел, отброшенных в результате безосновательного округления.

Итак, после тривиального преобразования координат точки квадрата в мнемоническую запись, с ними производится манипуляция, которая также не имеет веско аргументированного, рационального смысла. Перетасовыванием знаков двух чисел формируется новое число:

$$z = 0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3...\alpha_n\beta_n...$$

Обратим внимание на следующее интересное замечание и на приведенный далее способ отождествления:

"для простоты мы не берем точки квадрата, лежащие на его сторонах, а берем лишь внутренние точки...

Нам надо теперь найти точку Q отрезка AB, соответствующего точке T" [6, с.78].

Точка T – это точка в квадрате с указанными координатами *x* и *y*. Координата точки отрезка выбирается по принципу Q = *z*. Далее делается ожидаемый вывод: точке T квадрата поставлена в соответствие точка Q отрезка [0, 1]. Следовательно, различным точкам квадрата соответствуют разные точки отрезка и тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и точками отрезка. Из этого также следует, что множество точек квадрата имеет такую же мощность (количество), что и множество точек отрезка (их количество).

Такие выводы противоречат не только здравому смыслу, но и логике, поскольку налицо подмена понятий. Сначала обратим внимание на то, что же отождествляется. А отождествляется координата точки отрезка и некоторое комбинационное число, которое вообще-то координатой не является. Действительно, координатой чего мы можем признать сборку - число *z*? Какое отношение эта комбинация знаков имеет к координатам *x, y* точки квадрата? Координаты – это *два* числа (так сказать, две штуки), а *z* – это *одно* число (одна штука). По существу, число *z* является для координат *x, y* своеобразным *индексом*. Иными словами, мы здесь отождествили не две точки, а точку и некий индекс. Но индекс чего? Квадрат – это плоская фигура, следовательно, каждая его часть изначально должна рассматриваться как такая же плоская фигура, фигура с площадью. И мы фактически отождествили не две точки, а точку и площадку, бесконечно малый квадрат. Размеры точек на линии и точек, площадок на квадрате разные, хотя и те и те бесконечно малы.

Конечно, для отождествления это не является противоречием. Мы можем, например, отождествить 10 яблок и 10 уток. Или 200 кресел в кинотеатре и 200 зрителей. Но при этом следует помнить, что равны не они сами по себе, а их количества. В доказательстве Кантора, вроде бы, так и говорится, что равны мощности, равны количества. Однако преподносится это так, что создается впечатление, будто эти сравниваемые множества равны не только по своим количествам, мощности, но и равны буквально – точка на линии тождественно равна точке на квадрате. При таком подходе можно отождествить *любые* бесконечности, просто отбросив их качество и оставив лишь безликое количество. Все зависит только от искусства отождествителя. Простой пример.

Точки любой линии на плоскости характеризуются двумя координатами. Точно так же и в рассмотренном примере все точки линии имеют две координаты, одна из которых просто равна нулю. Теперь становится ясным, почему мы обратили внимание на замечание "для простоты мы не берем". На самом деле в таком упрощении преследовалась цель упростить организацию подмены понятий. Ведь если у линии признать наличие *имеющейся на самом деле* второй координаты, то и для неё пришлось бы также формировать комбинированное число - индекс. Действительно, если вернуть в рассмотрение и стороны квадрата, то одна из них совпадет с отождествляемой линией. В этом случае надо было бы *веско обосновать*, почему координаты нижней стороны квадрата преобразуются в число z, а линия, полностью *совпадающая* с этой стороной, по-прежнему описывается одной координатой, хотя у неё однозначно имеется и вторая? Ясно, что разумные обоснования этого просто *невозможны*. Если же вернуть линии её законные права на вторую координату, то все её собственные числа z будут начинаться с нулевого знака. То есть, с линией можно будет отождествить только одну *единственную* линию квадрата – его нижнюю сторону. Соответственно, мощность множества точек линии окажется меньше мощности точек квадрата в счетное число раз, то есть, в бесконечное. Мощность множества точек квадрата имеет более высокий порядок. Просто результат зависит от способа подсчета и может быть выбран на любой вкус. Два способа мы уже увидели. Вот еще:

Рассмотрим эти два объекта в единой метрической системе единиц, в которой размер точки квадрата равен размеру точки линии. Это естественное разумное предложение: бессмысленно приравнивать, скажем, два *куска* золота, размеры которых неизвестны. Длина стороны квадрата равна *a*, следовательно, метрически он содержит a^2 точек. Отрезок по этой же причине содержит *a* метрических точек. Другим словами, квадрат и линия метрически тождественны. Тогда линия длиной an будет содержать заведомо больше точек, чем квадрат, если $n > a$.

Такой же результат можно получить и иначе. Возьмем тот же квадрат и разделим его на 4 части. Нижний ряд, два вновь образовавшихся квадрата назовём условно линией. Пока эти квадраты, понятно, на линию не похожи.

Теперь разделим эти 4 квадрата ещё на 4 части каждый. Нижний ряд из 4 квадратов по-прежнему будем считать линией. Затем вновь каждый квадрат разделим крестом на 4 части. Теперь уже нижний ряд из 8 мелких квадратов отдаленно напоминает некую линию. Посчитаем, отношение количества этих квадратиков в исходном квадрате к их количеству на прообразе линии. По пройденным шагам деления эти отношения равны: 2, 4, 8. Легко обнаружить, что эти отношения будут возрастать по мере дальнейшего деления квадратов по уравнению $2^n \times 2^n$. Каждый из сомножителей означает, соответственно, деление по вертикали и по горизонтали. Продолжим такое же деление до бесконечности: $n \to \infty$.

Очевидно, что все квадратики станут бесконечно малыми, превратятся в точки и исчезнут из видимости. При этом и линия станет тем, чем мы её обычно и представляем – линией с нулевой толщиной. Что важно, в этом случае и квадрат и линия состоят из *одинаковых* точек. И количества этих точек будут для квадрата – $2^n \times 2^n$, для линии – 2^n. Отношение количеств или мощностей точек квадрата к точкам линии будет равно 2^n. При увеличении числа шагов деления до бесконечности отношение также увеличится до бесконечности. Это значит, что мощность множества точек квадрата имеет более высокий порядок, чем мощность множества точек отрезка. Конечно, этот способ относится более к алгебре, чем к геометрии, поэтому в нём подмены с отождествлением скрыть труднее.

Наконец, можно рассмотреть и классический способ подсчета. Для этого возьмем одну из горизонтальных линий квадрата и начнем пересчитывать на ней точки: 1, 2, 3 и так далее. Поскольку координаты точек на отождествляемой линии совпадают с одноименными координатами линии квадрата, то будет пересчитывать одновременно и их: 1, 2, 3 и так далее. Это самый правильный способ пересчета и отождествления. Очевидно, что мы получим два тождественных счетных множества, однозначно отождествив все точки линии со всеми точками на одной из линий квадрата. Остальные линии квадрата, с другими координатами, разумеется, останутся без номеров. Вряд ли этому следует удивляться: физически и геометрически две линии тождественны. Следует отметить, что здесь мы пересчитываем не координаты, которые обозначаются действительными числами, необоснованно признанными несчетным множеством.

Таким образом, после завершения счета мы обнаруживаем, что одна единственная линия квадрата и отождествляемая с ним линия имеют равные мощности или количества точек. Но на квадрате таких линий – счетное множество (помним и отвергаем утверждение о несчетности множества действительных чисел). Следовательно, общее число точек на квадрате в счетное множество раз превышает число точек на любом его отрезке и отождествляемой линии.

Однако все рассмотренные отождествления, зависимые от способа счета, построены таким образом, что подсчет числа точек всегда приводит к результату либо большей, либо равной мощности множества точек квадрата по сравнению с множеством точек отрезка. Но можно подобрать и такое правило счета, что соотношение изменится на обратное: окажется, что число точек в отрезках является более мощным множеством. Для этого возьмем не один, а несколько одинаковых квадратов, просто выбрав в кубе несколько разных сечений, и одну линию. Попробуем отожествить все точки этих квадратов с точками на линии. Вновь воспользуемся методикой нумерации точек, предложенной Кантором. Согласно ей, каждая точка квадрата в кубе характеризуется тремя координатами:

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

$$y = 0,\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

$$s = 0,\gamma_1\gamma_2...\gamma_n...$$

Для определенности возьмем в кубе 10 сечений, причем имеющие точное значение координаты s = 0; 0,1; 0,2 ... 0,9. Теперь создадим по методу Кантора новые числа для точек каждого квадрата. Согласно этому методу каждая точка квадрата будет описываться новым числом – индексом:

$$z = 0,\gamma_1\alpha_1\beta_1\gamma_2\alpha_2\beta_2...\gamma_n\alpha_n\beta_n...$$

Например, точки квадрата с номером s = 0,5 будут описываться индексом:

$$z = 0{,}5\alpha_1\beta_1 0\alpha_2\beta_2...0\alpha_n\beta_n...$$

Сразу же видим, что все точки этого квадрата расположатся на интервале линии 0,5...0,6 и, более того, на линии останется бесконечное число точек, которым не будет соответствовать ни одна точка этого квадрата. Это точки, для которых индекс должен был бы содержать вместо нулей в позициях, кратных трём, другие цифры. Ничего не изменится, если цифру координаты s ставить в тройках последней.

Такая же ситуация будет наблюдаться с индексами и других девяти квадратов. Таким образом, мы разместили все точки десяти квадратов на одной линии [0, 1], причем на линии осталось бесконечное число незанятых точек. Получается, что мощность множества, количество точек квадрата имеет меньший порядок, чем мощность множества точек любой линии. В нашем случае – в десять раз. Но мы могли использовать и другое количество квадратов. Тогда и их точки оказались бы во взаимном однозначном соответствии с точками *части* отрезка. В этом случае соотношение мощностей станет еще больше и даже, по желанию, в любое число раз.

Очевидно, что такой принцип "сколько будет? а сколько надо?", к которому сводится метод Кантора, не может служить основой для корректного математического приема. Но в чем же состоит хитрость, изюминка, так сказать, канторовского метода отождествления? По какой загадочной причине происходит такое противоестественное отождествление? В чем его тайный механизм? Ведь мы же четко видим, что каждой точке квадрата можно однозначно привязать каждую точку линии, причем ни одна точка не останется без своей единственной пары. А тайна, в сущности, предельно проста. Покажем это на еще одном несколько отвлеченном, но подобном примере.

Возьмем для лучшей визуализации квадрат с бесконечным числом точек в количестве... 1000x1000. Конечно, это на самом деле не бесконечность, но число все-таки очень большое – миллион точек, пересчитать которые вручную будет весьма непросто.

Выберем на этом квадрате одну линию, нижнюю грань квадрата. Согласно методу Кантора присвоим какой-то точке квадрата индекс:

$$x = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n... \qquad = 008$$

$$y = \beta_1\beta_2...\beta_n... \qquad = 010$$

$$z = \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3...\alpha_n\beta_n... \qquad = 00.01.80 = 000180$$

Здесь индекс *z* сначала представлен с разделительными точками, чтобы было видно, как он образован. Итак, мы получили число *z*, которое, видимо, точно имеется на отрезке [0, 999]. Правда, настораживает число нулей в этом индексе. Поэтому возьмем для уточнения другую точку на квадрате:

$$x = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n... \qquad = 018$$

$$y = \beta_1\beta_2...\beta_n... \qquad = 025$$

$$z = \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3...\alpha_n\beta_n... \qquad = 00.18.25 = 001825$$

Что-то у нас, как видим, пошло не так. Сразу же можно сделать вывод: на линии [0, 999] такой точки *точно* нет. В чем же дело? Мы в точности следовали методу Кантора, просто использовав отрезок не [0, 1], а более длинный [0, 999]. Принцип тот же, а размеры фигур явно не должны влиять на результат. Иначе получается противоречие: квадрат и линия размером [0, 1] тождественны по мощности, а квадрат и линия [0, 999] имеют уже разные мощности.

Однако именно в этом и состоит хитрость, а по сути подмена понятий в методе Кантора. В нашем случае мы можем попытаться решить проблему такой же дополнительной хитростью. Просто добавим в нашем индексе... запятую. В этом случае подозрительно большое количество нулей сразу превращается в нужное количество:

$$z_1 = 00.01.80 = 000{,}180$$

$$z_2 = 00.18.25 = 001{,}825$$

Вот теперь-то каждая из этих точек уже обязана найти своё соответствие на линии. Но возникает другое противоречие. Координаты всех точек квадрата и линии – целые натуральные числа. А здесь мы получили числа дробные, поэтому отождествлять эти индексы с точками линии мы не имеем права. Зато мы обнаруживаем ту самую загадку метода Кантора для отрезка [1, 0]. Фактически индекс формируется методом, схожим с умножением двух чисел. В нашем случае это соответствие должно выглядеть примерно так:

$$z_1 = x_1 \times y_1 = 008 \times 010 = 000800$$

$$\textit{вместо}\ z_1 = 000180$$

и для второго примера:

$$z_2 = x_2 \times y_2 = 018 \times 025 = 000450$$

$$\textit{вместо}\ z_2 = 001825$$

Для сравнения приведем и третий пример:

$$z_3 = x_3 \times y_3 = 555 \times 777 = 431235$$

$$\textit{вместо}\ z_3 = 575757$$

Как видим, оба метода – умножение и перетасовка цифр – дают числа одного и того же порядка с разрядностью площади квадрата (миллион). При этом можно догадаться, что количество разных произведений координат ровно в два раза меньше, чем количество пар сомножителей, поскольку они могут меняться местами. Действительно, пар сомножителей ровно миллион, следовательно, и произведений тоже ровно миллион. Поскольку существуют симметричные пары сомножителей, то их произведения равны. Следовательно, число произведений равно полумиллиону. Мы полагаем, что произведения разных чисел дают разные результаты.

При перетасовках цифр смешиваемых пар также ровно миллион, следовательно, и результирующих чисел с перетасованными цифрами также будет миллион. Но в этом случае, что довольно странно, среди них не будет одинаковых. В этом несомненная выгода метода Кантора – каждая точка получит свой индивидуальный, уникальный индекс. Однако, таких индексов заведомо больше, чем элементов в строке, следовательно, и в отождествляемой линии. Искусственно введенная запятая сжимает эти числа до интервала отрезка [0, 999], но множество из них сразу же становятся дробными, то есть, объективно не могут этому отрезку принадлежать.

А что же с исходным методом Кантора? Там, как видим, произведена точно такая же замена умножения двух чисел на перетасовку их цифр, позволившая получить нужное количество индексов. Порядок чисел при умножении и перетасовке по-прежнему один и тот же. Однако индексы или произведения координат имеют больший порядок дискретности, чем каждая из координат, в том числе, и точки отождествляемой линии. И здесь происходит всё та же подмена понятий при подсчете числа элементов в ряду, что и при подсчете числа четных чисел в натуральном ряду. Только здесь каждой точке линии соответствует бесконечное число индексов точек квадрата. И вот почему.

Понятно, что в числах с бесконечным числом знаков разглядеть это весьма непросто, тем более что все они выглядят одинаково, поскольку одинаково начинаются – с нуля и запятой после него. Сравнивая числа - координату линии (q) и координатный индекс z(x, y), например, для q=x=y=0,1 (точное значение), мы находим z=0,11. Дискретность z в этом случае в 10 раз выше, чем дискретность q. То есть, между двумя дискретными значениями q=0,1…0,2 поместится десять подобных индексов. Если q=x=y=0,12345, то z=0,1122334455 и дискретность z уже в 100000 раз больше дискретности q. Следовательно, между точками q=0,11223…0,11224 (это точные значения) поместится 100000 индексов с дискретностью z. Другими словами, беря две координаты с некоторой дискретностью (числом знаков после запятой), мы получаем индекс с удвоенной дискретностью и степенным увеличением их количества. Сравнивая координаты линии и индексы, мы сравниваем фактически не их значения, которые предельно скрыты от нас из-за их бесконечной длины, а их порядковые номера, которые для счетных множеств, разумеется, всегда найдут соответствие.

Описать этот процесс однозначно и максимально развернуть крайне сложно. Поэтому ещё раз обратимся к примеру. Пусть отрезок [0, 1] состоит из миллиарда (10^9) точек, а соответствующий ему квадрат, следовательно, содержит 10^{18} точек. Эти числа являются так же и количествами их порядковых номеров, эквивалентами мощностей этих множеств. Сразу же обнаруживаем, что на линии точек меньше, чем в квадрате. Если постоянно удваивать количество точек вплоть до бесконечности, это отношение будет только возрастать.

Если для отождествления мы возьмём произвольную точку указанного квадрата, то её координатный индекс будет содержать 10^{18} знаков после запятой. И мы не имеем никакого права отождествлять этот индекс с точкой на линии, поскольку на ней допустимы только числа с 10^9 знаков после запятой, таких точек на линии просто нет. При увеличении дискретности квадрата и линии это расхождение будет расти по квадратичному закону.

Кстати, здесь мы наглядно обнаруживаем абсурдность сравнивания количества чисел натурального ряда и его части. Мы можем, говоря тавтологией, методом квадрата перенумеровать точки линии и квадрата, даже не формируя для них индексы, и получим при этом равенство их количества. Однако мы только что увидели, что такое равенство противоречиво, а попросту его нет. Следовательно, и сравнивание количества членов множеств путем их пересчитывания – это в общем случае опасный, ошибочный, некорректный метод, позволяющий получить любой желаемый результат, и которым следует пользоваться предельно продуманно. Действительно, мы можем сравнивать точки линии и квадрата таким же простым пересчетом.

Стереографическая проекция

Один их истоков или примеров отождествления бесконечностей разной мощности можно обнаружить в механизме стереографической проекции, также фактически отождествляющей точку и отрезок. Рассмотрим соотношение между размерами двух отрезков, которые затем сожмем в точки:

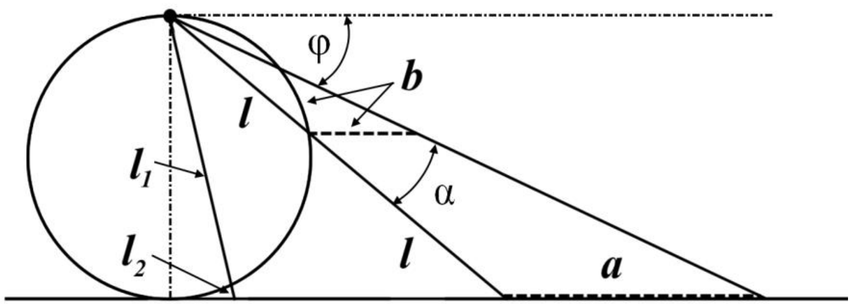


Рис.6. Стереографическая проекция отождествляет отрезок и точку.

Каждая проекционная линии, прямая делится проецируемой точкой окружности между полюсом и проекционной плоскостью на две части, например, l_1 и l_2. Возьмем частный случай, когда отрезок делится пополам, то есть, $l_1 = l_2 = l$. Проведем ещё одну проекционную линию под углом α к исходной линии. В этом случае на окружности образуется дуга, а на плоскости – отрезок. Проведем из проецируемой точки пересечения дополнительный отрезок между проекционными лучами параллельно плоскости из проецируемой точки. Обозначим полученный отрезок через b, а проекцию на плоскости – через a. Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{a}{b} \approx \frac{2l}{l} = 2$$

Здесь знак неточного равенства взят из предположения, что отрезок b приблизительно равен длине дуги. Это не точное равенство, но в средней части окружности отрезок и дуга отличаются друг от друга незначительно, в конечное число раз. Теперь найдем предел этого отношения, когда угол между двумя проецирующими прямыми стремится к нулю:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a}{b} = 2$$

Это очевидный и аналитически достоверный предел. Но при этом возникает вопрос: что же означает это отношение 2? Две проекционные прямые слились в одну, и эта прямая пересекает и окружность и плоскость в *одной* точке каждую. Что же означает это соотношение для двух разных точек? Если считать, что точка – это то, что не имеет частей, то ответ становится совершенно туманным. Выходит, что точки не имеют частей в разном количестве. В любом случае для утверждения, что точка на окружности спроектировалась в единственную тождественную точку на плоскости, четких, бесспорных оснований уже нет.

Однако это соотношение мы нашли для конкретного, среднего угла. А что если пару прямых, проектирующих лучей повернуть ближе к горизонтальному направлению? Более того, устремить к нулю не только угол между проецирующими прямыми, но и их средний угол к плоскости. В этом случае мы увидим, что отношение будет стремиться к бесконечности:

$$\lim_{\substack{\varphi \to 0 \\ \alpha \to 0}} \frac{a}{b} = \infty$$

Вопрос о смысле этого отношения становится еще более острым. Если две точки – исходная, проецируемая и её проекция – отождествляются, тогда что означает это отношение? Изначально оно составлялось как отношение длины проецируемого отрезка и проекции, которые в дальнейшем уменьшением угла до нуля были преобразованы в точки. Хотя точка и не имеет частей, но величина соотношения определенно выглядит как количество проецируемых точек в проекции. Звучит весьма странно: проецирующий луч создаёт проекцию, имеющую явно не нулевые, не точечные размеры. Можно сколько угодно с этим не соглашаться, но как можно иначе рационально объяснить это соотношение?

Обычно бесконечно малые величины в алгебре характеризуются параметром порядка малости. Если две величины имею отношение конечной величины, то они считаются величинами одного порядка малости. Если отношение стремится к бесконечности, то величины имеют разный порядок малости. С учетом этого следует предположить, что стереографическая проекция окружности на плоскость некорректна, а проекциями её точек фактически являются плоские фигуры, отрезки.

Рассмотрим эту же ситуацию с другой точки зрения, не отождествляя дугу окружности и прямой отрезок. Для этого нам понадобится одно интересное соотношение. Если к отрезку дуги провести по два луча из центра окружности и из любой точки окружности, кроме точек дуги, то угол между лучами в первом случае будет в два раза больше угла между лучами во втором случае. Очевидно, что такая теорема имеется среди многочисленных теорем геометрии, но мы здесь все-таки приведем её краткое, несложное доказательство. Несомненно, оно не является новым.

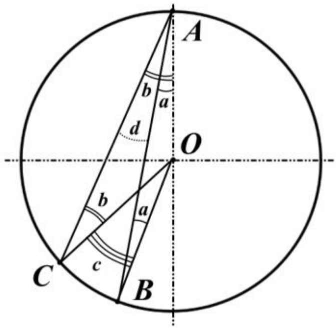


Рис.7. Теорема об углах на дуге окружности

Итак, возьмем на окружности рис.7 некоторую произвольную дугу CB и проведем к ней две пары лучей – из центра и из произвольной точки A. Проведем далее вспомогательный диаметр окружности через эту точку. Обозначим одинаковыми буквами равные углы, поскольку это углы в равносторонних треугольниках у равных сторон. Следовательно, угол AOB = π – 2a, угол AOC = π – 2b, угол CAB = d = b – a. Углы при вершинах равносторонних треугольников, соответственно, равны: AOB = π – 2a и AOC = π – 2b. Разница этих двух углов равна

c = AOB – AOC = π – 2a – π + 2b = 2b – 2a = 2d

Отсюда и следует d = c/2, что и требовалось доказать.

Согласно этой теореме, на рис.6 длина дуги окружности в пределах угла α равна 2αR, поскольку угловая величина дуги рана 2α. Длину линии проекции *a* в основании проекционного угла найдем как разницу сторон двух прямоугольных треугольников:

$$tg(\varphi) = \frac{2R}{a_1}$$

$$tg(\alpha + \varphi) = \frac{2R}{a_2}$$

Отсюда находим величину *a*:

$$a = a_1 - a_2 = 2R\left(\frac{1}{tg(\varphi)} - \frac{1}{tg(\alpha+\varphi)}\right)$$

Как и выше, найдем отношение длины отсекаемой на окружности дуги к длине этого отрезка:

$$\frac{b}{a} = \frac{2\alpha R}{2R\left(\dfrac{1}{tg(\alpha+\varphi)} - \dfrac{1}{tg(\varphi)}\right)} = \frac{\alpha \cdot tg(\varphi) \cdot tg(\alpha+\varphi)}{tg(\varphi) - tg(\alpha+\varphi)}$$

Найдем предел этой величины, когда каждый из углов стремится к нулю. В этом случае обе проекционные линии сблизятся до слияния, а их средняя линия будет стремиться к горизонтальному положению:

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \varphi\to 0}} \frac{b}{a} = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \varphi\to 0}} \frac{\alpha \cdot tg(\varphi) \cdot tg(\alpha+\varphi)}{tg(\varphi) - tg(\alpha+\varphi)}$$

В общем случае мы получаем неопределенность, поскольку к нулю стремятся и числитель и знаменатель. Поэтому мы поступим следующим образом. Найдем эти пределы для нескольких конкретных значений среднего проекционного угла φ. В этом случае неопределенность не устраняется, но мы табличным методом построим соответствующие графики, которые визуально продемонстрируют наличие конечных пределов. Табличные значения сходятся удовлетворительно быстро, поэтому были получены следующие значения пределов для произвольно взятых значений угла φ:

φ = π/2, lim = 1,00 – точка касания

φ = π/3, lim = 0,75

φ = π/4, lim = 0,50

φ = π/6, lim = 0,25

φ = π/9, lim ≈ 0,1169778…

φ = π/18, lim ≈ 0,0301537…

φ = π/36, lim ≈ 0,0075961…

φ = π/360, lim ≈ 0,0000761...

Как видим, пределы существуют для любого значения проецирующей линии. График зависимости предела от угла проецирования имеет f – образную форму (без поперечной черточки) в диапазонах величин $\varphi = 0 \ldots \pi/2$ и $\lim = 0 \ldots 1{,}0$. Можно достаточно обоснованно заявить, что такое конформное стереографическое преобразование фактически *отождествляет точку и линию*. И только единственная – вертикальная – проекция отождествляет точку на сфере с точкой на плоскости – это точка их касания. Верхняя точка, полюс фактически проецируется в линию бесконечной длины. Правда, мы рассматривали не сферу, а круг. Точка на сфере проецируется не в отрезок, а в плоскую фигуру. В этом случае явно напрашивается предположение о форме самого проецирующего луча, который теперь уже формально может, и даже обязан иметь некое сечение: круглое, квадратное, в форме звезды и так далее.

Вместе с тем, отождествление поверхности сферы и плоскости можно произвести и иным, более рациональным, наглядным способом: прокатыванием сферы по плоскости. В этом случае каждая точка сферы коснется единственной точки плоскости, с которыми их и следует отождествить. Первый шаг – прокатывание сферы по прямой на угол 2π. Появляется на плоскости линия тождественных точек длиной $2\pi R$. Затем перпендикулярно этой линии прокатываем сферу на бесконечно малый шаг, после чего возвращаем сферу в исходное угловое положение. Получена вторая линия. Шаги совершаем столько раз, чтобы сфера повернулась опять на угол 2π, но уже вокруг перпендикулярной оси, в результате чего образуется граница линий тоже длиной $2\pi R$. Таки образом, на плоскости образуется квадрат, площадью $4\pi^2R^2$. Как видим, полученный квадрат в π – раз больше площади сферы. Это связано с тем же стереографическим эффектом, в результате которого "толщина" отождествляемых точек сферы больше по краям квадрата.

Более корректным отождествлением поверхности сферы и плоскости является "раскатывание" сферы по спирали. Такое раскатывание напоминает чистку картофелины, когда кожура с неё срезается по спирали тонкой полоской. При уменьшении ширины полоски она превращается в тонкую линию, которую и выкладывают на плоскости виток к витку в виде спирали Архимеда. Действительно, если рассматривать длину витка как функцию от полярного угла, то эту зависимость можно выразить уравнением:

$$L = 2\pi R \sin \varphi$$

Полную площадь развертки можно найти, проинтегрировав эту величину в диапазоне углов от 0 до π, считая, что толщина этой полосы-линии равна Rdφ:

$$S = \int_0^{2\pi} 2\pi R \sin \varphi \times R d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = 2\pi R^2 \cos \varphi \Big|_0^{\pi} = 4\pi R^2$$

Как видим, при таком раскатывании сферы образуется круг, площадь которого в точности равна площади поверхности сферы. При таком отождествлении каждой точке сферы соответствует единственная точка круга. Конечно, в этом случае луч проецирования всегда направлен строго вертикально, а центр сферы должен описывать такую же спиральную траекторию, как образующаяся проекция.

Такие методологии проецирования легко распространить на отождествление любых геометрических и аналитических объектов: площади фигур любой формы и размеров, с отверстиями и без, замкнутые и так далее. Более того, нет никаких препятствий для отождествления линейных фигур любого порядка и объемных тел. И уже предельной формой такого отождествления является отождествление всех геометрических объектов с точкой. Действительно, можно взять отрезок, отождествить его точки, например, со сферой (и даже по всему её объему), затем устремить размеры отрезка к нулю.

Конечно, если фигура не имеет явного аналитического выражения, описания, сделать это будет сложнее, но все-таки возможно, если использовать табличное представление фигуры. Абсурдность и бесполезность такого отождествления очевидны.

Парадоксы теории относительности

Млечный Путь и темная материя

Пожалуй, самыми удивительными и фундаментальными открытиями, буквально перевернувшими наше мировоззрение, являются открытия в космологии, астрономии. На их фоне не так блистают даже открытия историков и генетиков, касающиеся происхождения человека.

Видимо, поэтому именно в космологии выдвигаются и самые невероятные, самые фантастические гипотезы. Тёмная материя, тёмная энергия среди них, пожалуй, даже и не самые странные. Куда более странным можно признать некоторые трактовки реальных наблюдательных данных. Например, гипотеза о тёмной материи возникла из анализа движения скоплений галактик и звёзд в галактиках. При исследовании скоростей движения звезд в галактике Млечный Путь, астрофизики обнаружили странное явление. Скорости эти таковы, что звезды должны были покинуть галактику. Но галактика не распадается, следовательно, что-то удерживает звёзды на их орбитах, какая-то неучтенная масса. Проведя компьютерные вычисления, исследователи определили величину этой «недостающей» массы, удерживающей звёзды, и даже характер её распределения в галактике. Казалось бы, модель хорошо описывает состояние Млечного Пути и осталось лишь найти эту загадочную «темную материю».

Тем не менее, модель эта явно не учитывает очевидные, в общем-то, обстоятельства. Гипотеза о тёмной материи объясняет *движение* звёзд, которое само по себе *невозможно*! Измеренная наблюдаемая кривая вращения звёзд галактики Млечный Путь не выдерживает элементарного логического анализа. В астрономических справочниках в интернете можно найти сведения о движении галактики. В частности, период её вращения составляет примерно 200-300 млн. лет. Но, если наложить на галактику измеренную кривую вращения, учитывающую темную материю, мы обнаружим, что с такими скоростями галактика просто не может иметь нынешнего вида даже в пределах одного-двух оборотов. Причём даже с учетом разброса параметров движения звёзд.

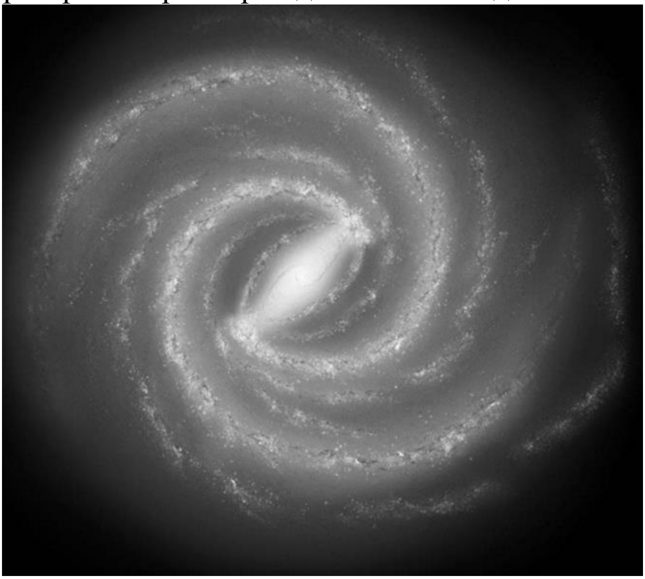


Рис.8. Карта галактики Млечный Путь [2]

С одной стороны, скорости звёзд таковы, что без темной материи они должны покинуть галактику. Но, с другой стороны, с такими скоростями они просто не могут собраться в известные ныне рукава галактики. Один-два оборота галактики и от рукавов в нынешнем виде не останется ничего. При таких скоростях в будущем они должны слиться в сплошной диск, а в прошлом должны были быть закручены в обратном направлении.

Для проверки поведения рукавов галактики, они были аппроксимированы аналитическими кривыми. Исследование модели галактики показали, что рукава с наблюдаемой кривой вращения крайне нестабильны даже на коротких временных промежутках. Модель даже с учетом погрешностей показала: менее 200 млн. лет назад рукава галактики Млечный

Путь должны были быть закручены в обратную сторону. Более того, примерно 600 млн. лет назад рукава полностью меняют направление закрутки, причем галактика практически выглядит вообще как сплошной диск.

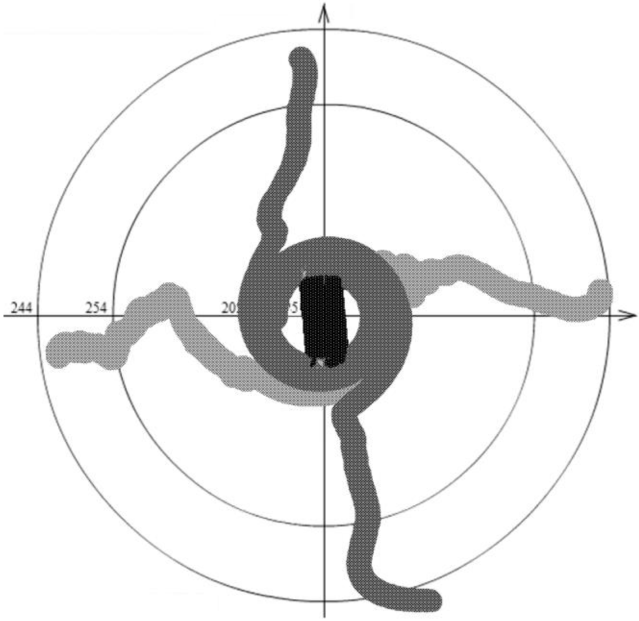


Рис.9. Вид галактики 167 млн. лет назад

Такая картина, видимо, должна вызывать недоверие, представления о равномерном вращении галактики обоснованы недостаточно. Списание обнаруженных явлений на темную материю лишь наделяет её ещё более экзотическими свойствами. По какой причине галактика вращается столь странным образом? Получается, что около 600 млн. лет назад галактика была сплошным диском, но затем странным образом этот диск оказался разрезанным на нынешние рукава.

Такая картина возникает исключительно как результат влияния наблюдаемой кривой вращения. Наличие темной материи в данном случае ничего не проясняет, поскольку кривые вращения – это наблюдаемые параметры.

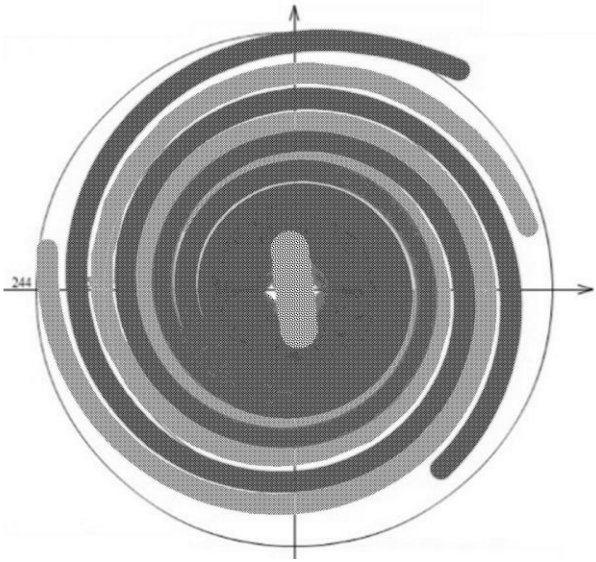


Рис.10. Вид галактики Млечный Путь 600 млн. лет назад.

Возникает неприемлемое противоречие между гипотезой о темной материи и возможностью возникновения рукавов наблюдаемой формы.

Тёмная энергия – гипотеза о происхождении

Не менее странные выводы можно сделать и в отношении темной энергии, причины ускоренного расширения Вселенной. Давайте попробуем аналитически разобраться, как вообще происходит расширение Вселенной. Для определенности механизм расширения представим как монотонное деление атомов пространства, наподобие клеточного деления. Очевидно, что добавление новых атомов пространства выглядит как увеличение всех расстояний, причем реальное движение материальных объектов при этом не возникает.

Конечно, удвоение атомов пространства это, видимо, завышенная величина. Поэтому выберем некоторую константу, значение которой нам пока неизвестно. Поскольку конечный результат, надо признаться, нам известен, в качестве константы возьмем величину e^H, которую назовём коэффициентом пространственного расширения. Пусть в начальный момент времени расстояние между двумя объектами (галактиками) равно r_0. Согласно выбранной модели за каждую единицу времени количество атомов пространства будет возрастать в e^H раз. Поэтому в каждый следующий момент времени расстояние будет увеличиваться:

$$t=1 \quad r=r_0\times e^H$$

$$t=2 \quad r=r_0\times e^H\times e^H$$

$$t=3 \quad r=r_0\times e^H\times e^H\times e^H$$

$$t=4 \quad r=r_0\times e^H\times e^H\times e^H\times e^H$$

И так далее. Закономерность очевидна:

$$t=n \quad r=r_0\times\underbrace{e^H\times e^H\times\ldots\times e^H\times e^H}_{n}=r_0e^{Hn}=r_0e^{Ht}$$

Или кратко:

$$r=r_0e^{Ht} \tag{2}$$

Уравнение описывает, как со временем увеличивается расстояние между двумя областями, находящимися в исходном состоянии на некотором расстоянии r_0. Используя известные значения параметров, можно найти уравнение движения самой удалённой галактики (самой молодой), которая стала видимой только что:

$$r=1{,}26\times10^{10}e^{68\times10^{-12}t}$$

Здесь использованы единицы - световые годы и годы. Уравнение означает, что галактики, находившиеся на момент Большого Взрыва на расстоянии от Земли меньшем, чем $1{,}26\text{x}10^{10}$ световых лет, уже давно видны. Галактики, находившиеся на большем расстоянии, с Земли сейчас не видны в принципе.

Легко заметить сходство уравнения (2) с законом Хаббла, но для зависимости не скорости от расстояния, а расстояния от времени. Если продифференцировать по времени, то мы сразу же и получаем закон Хаббла:

$$v = \dot{r} = r_0 H e^{Ht}$$

Замечаем, что последний сомножитель – это значение r, подставляем и получаем обычную запись закона Хаббла:

$$v = Hr$$

Что интересно, выведенный закон расширения пространства описывает ускоренное расширение даже при неизменном значении параметра H:

$$a = \dot{v} = H^2 r_0 e^{Ht}$$

Другими словами, при ненулевом значении параметра H любые два объекта всегда удаляются друг от друга с ускорением. Более того, и само ускорение движения также является ускоренным:

$$w = \dot{a} = H^3 r_0 e^{Ht}$$

Автоматически возникает вопрос: что в этом случае понимать под ускоренным расширением Вселенной, если она ускоренно расширяется по определению?

Основанием для заключения об ускоренном расширении Вселенной послужила пониженная яркость сверхновых, свидетельствующая об их большей удаленности, чем это следует из закона Хаббла.

Исходя из закона Хаббла, вполне разумно отсчитывать ускорение именно по отклонению от него, то есть, по изменению постоянной Хаббла: если постоянная Хаббла возрастает, то и расширение является ускоренным, и наоборот.

И вот что интересно. Если дальние галактики менее яркие, то возникает интуитивное ощущение, что они просто в своё время улетели слишком далеко, поэтому и видны хуже, кажутся менее яркими. Но это означает, что раньше они двигались быстрее, то есть Вселенная расширяется с замедлением. Конечно, интуитивные представления не являются аргументом. Но все-таки следует этот вопрос рассмотреть внимательнее.

Сделаем это, так сказать, образно, упрощенно. Для этого рассмотрим четыре предельные гипотетические ситуации. Пусть расстояние между условными участниками - суперновыми SN12 и SN6, а также между SN6 и Землей равно 2 единицам, R=2+2. В случае расширения пространства на момент встречи фотонов с Землей, оно удвоилось.

Ситуация 1 – Вселенная статична. Фотоны от SN12 должны пройти весь путь до Земли – S=2+2=4, следовательно, они ослабнут в 16 раз. Удлинения волны нет, следовательно, нет и красного смещения.

Ситуация 2 – Вселенная сначала статична, затем, когда фотоны от SN12 поравнялись с SN6, начала расширяться. В этом случае фотоны от SN12 на первом участке S=2 ослабнут в 4 раза, затем на следующем, на пути от SN6 до Земли S=4, еще в 16 раз, следовательно, в целом они ослабнут в 64 раза. Длина волны удваивается, поскольку удвоился масштабный фактор.

Ситуация 3 – Вселенная сначала расширялась, затем, когда фотоны от SN12 поравнялись с SN6, стала статичной. В этом случае фотоны от SN12 на первом участке S=4 ослабнут в 16 раз, затем на следующем, на пути от SN6 до Земли S=4, еще в 16 раз, следовательно, в целом они ослабнут в 256 раз. Длина волны удваивается.

Ситуация 4 – Вселенная равномерно расширяется. Постоянная Хаббла, видимо, меньше, чем в предыдущих ситуациях. В этом случае фотоны от SN12 должны пройти путь до Земли – S=(2+2)*2=8, следовательно, они ослабнут в 64 раза. Длина волны удваивается.

Если взять постоянную Хаббла из условия, что, в конечном счете, пространство увеличится до S=4+4, как в предыдущих ситуациях, то на первом интервале пространство должно увеличиться в $\sqrt{2}$ раза, S=$2\sqrt{2}$, ослабление – 8; на втором интервале в $\sqrt{2}$ раза, S=4, ослабление – 16. Результирующее ослабление – 8*16=124 раза. Длина волны удваивается.

Таким образом, наблюдаем закономерность: одна и та же суперновая SN12 видна с Земли с разным ослаблением яркости в зависимости от одного из четырех возможных характеров расширения Вселенной:

Статичная –	16
Ускоренная –	64
Равномерная –	128
Замедленная –	256

Выходит, что при ускоренном расширении Вселенной, пространства мы должны видеть далёкие галактики более яркими. Конечно, вычисления сделаны для некоторых довольно абстрактных ситуаций. Но так ли они далеки от реальности? А их результаты явно противоречат выводам астрофизиков и ведут к довольно неприятным последствиям для общей теории относительности и, в частности, для гипотезы о темной энергии. Как известно, основанием для этой гипотезы послужило открытие именно ускоренного расширения Вселенной.

В частности, гипотеза позволила объяснить причину, почему Вселенная плоская. По результатам наблюдений было вычислено, что барионное вещество и темная материя в сумме дают 25% необходимой массы, обеспечивающей плоскостность Вселенной. Недостающие 75% отнесли по остаточному принципу к тёмной энергии. В результате плотность вещества Вселенной стала равна критической, соответствующей плоской Вселенной.

Если же расширение Вселенной не ускоренное, а замедленное, то основания для тёмной энергии, по всей видимости, отпадают. В свою очередь это означает, что плотность вещества во Вселенной вновь оказывается ниже критической, а из этого, согласно общей теории относительности, должно следовать ускоренное расширение, поскольку сил гравитации становится недостаточно для замедления. Получается, что при имеющейся, согласно наблюдениям, массе вещества и других массивных субстанций, Вселенная должна расширяться ускоренно. А она, если приведенные выкладки верны, вопреки всему расширяется с замедлением.

Полученные выводы явно не вписываются в существующие физические концепции. Решительно заявлять, что они верны, рискованно. Но тогда в чем ошибка и есть ли она?

Согласно астрономическим наблюдениям, дальние сверхновые оказываются более тусклыми, чем это следует из закона Хаббла. Если они более тусклые, значит, они расположены дальше, чем этого требует закон Хаббла и величина красного смещения. По величине красного смещения и закону Хаббла определяют теоретическую удаленность звезды. Но для этой удаленности регистрируется меньшая яркость звезды, такая, будто звезда находится дальше. Какой можно сделать из этого вывод? В сущности, два противоположных. Можно сказать, что в древности молодая звезда удалялась быстрее, чем Вселенная расширяется сейчас, поэтому она и более тусклая. Возможно такое объяснение? Но ведь красное смещение показывает менее высокую скорость. Таково оно потому, что звезда замедлилась. Вроде бы, сходится?

Но с другой стороны, следует четко иметь в виду весьма важное обстоятельство. Когда звезда взорвалась, её фотоны ещё не испытали никакого красного смещения. В этот момент неважно, движется звезда или она вообще исчезла. Красное смещение фотоны приобретают не потому, что звезда удаляется от нас, а потому, что это мы удаляемся (на плечах расширяющегося пространства) от её фотонов, ставших самостоятельными, независимыми. В этом случае и ускоренное расширение становится приемлемым объяснением.

Причина противоречия, вероятно, состоит в том, что галактика оказывается на более далеком расстоянии, если Вселенная *сначала* расширялась, а *затем* остановилась (замедление). И, наоборот, если Вселенная *сначала* была статична, а *затем* начала расширяться (ускорение), то при таком же результирующем расширении пространства галактика оказывается менее удаленной и, соответственно, более яркой. А это явно не в пользу ускоренного расширения.

Сингулярная неполнота ОТО

Едва ли не в самой значительной степени свою популярность теория относительности получила благодаря предсказанию сингулярностей и Черных дыр. Вместе с тем, по признанию самих физиков, сингулярность для общей теории относительности и для физики в целом является серьёзной неприятностью. Хотя математические определения сингулярности в физической литературе встречаются достаточно часто, найти даже попытку приемлемого объяснения её *физической* сущности довольно сложно. Чаще всего дается внешнее описание процесса её возникновения, что попавшее под гравитационный радиус вещество звезды уже не может избежать падения на *сингулярность*.

Ссылка на давление приводится во многих описаниях. Обычно говорится о давлении газопылевой среды. А ведь на пути к нулевой точке есть ещё и молекулярная (атомарная, кварковая) структура вещества. Почему силы сжатия этих структур, которые, очевидно, на много порядков сильнее гравитации, не останавливают движение к сингулярности?

Литературный обзор процессов возникновения сингулярности показал, что в русскоязычной литературе по космологии почти все ссылки прямо или косвенно указывают на один и тот же источник - учебное пособие для вузов в 10 томах Ландау и Лифшица. Главной, если не единственной причиной возникновения сингулярности в момент коллапса указывается переход нейтронов, образующих нейтронную звезду, в состояние вырожденного фермионного газа:

Вырожденный фермионный газ – это такой газ, на свойства которого оказывают существенное влияние квантово-механические эффекты. Вырожденный фермионный газ – ферми-газ образуется фермионами, к которым относятся и нейтроны. При некоторых условиях в него и вырождается, то есть, превращается указанный выше нейтронный газ звезды:

Тем не менее, одних только утверждений и выкладок о свойствах вырожденных ферми-газов, всё-таки недостаточно. Рассмотрим ещё одну попытку обоснования сингулярности. При достижении гравитационного предела, звезда становится невидимой. Следовательно, поверхность звезды однозначно должна быть под горизонтом. Если перед началом коллапса звезда имела существенно больший размер, чем занимает шар с гравитационным радиусом, то сжатие вещества звезды неизбежно. И напротив, если радиус звезды до начала коллапса меньше гравитационного, то нет никаких веских оснований утверждать, что звезда вдруг уменьшила свой радиус. Видимо, в этом случае в момент коллапса радиус звезды и её гравитационный радиус тождественно равны.

Очевидно, у сверхмассивной Черной дыры разницу между сингулярностью и "нейтронным атомным ядром" по внешним проявлениям, извне распознать невозможно в принципе. Что сингулярность, что плотно сжатое нейтронное атомное ядро – всё это скрыто за горизонтом, и что там находится на самом деле, не видно. Но для Черных дыр начального, минимального размера разница может оказаться заметной. Согласно пределу Оппенгеймера-Волкова такой предельный размер. Это такая максимальная масса нейтронной звезды, при которой давление вырожденного нейтронного газа ещё может компенсировать силы гравитации, не давая звезде коллапсировать в Чёрную дыру. И, наоборот, для Черной дыры такая масса является минимальной:

По современным данным нижний предел массы Черной дыры лежит в пределах 2,5—3 солнечных масс, а из известных Черных дыр самая маломассивная имеет массу около 3,8 солнечной массы. Давайте рассмотрим такую Черную дыру с предельно малой массой в 2,5 солнечных. Интересует, могут ли нейтроны с такой общей массой поместиться в пределах горизонта черной дыры. Если это невозможно, то, следовательно, у сингулярности есть веские основания. Если же общий объём нейтронов окажется меньше объёма сферы с гравитационным радиусом, то принципиальных оснований привлекать сингулярность не будет. Нейтронная звезда просто увеличила свой гравитационный радиус, радиус горизонта за пределы своей физической поверхности. Нет никакого смысла утверждать, что нейтронное вещество стало сжиматься к центру, падать на сингулярность. Даже при дальнейшем неограниченном росте массы звезды нет веских оснований давать нейтронам такую способность уплотнения до бесконечности. Горизонт прячет от внешнего наблюдателя тело звезды и представления о сингулярности с бесконечно малым, даже нулевым радиусом выглядит чрезмерной экстраполяцией.

Но что интересно. От внимания почему-то ускользнуло важное обстоятельство: очевидно и согласно расчетам, в момент коллапса радиус нейтронной звезды в точности равен гравитационному радиусу образовавшейся Черной дыры. Из этого проистекают, по меньшей мере, два следствия. Согласно общей теории относительности на горизонте событий Черной дыры время останавливается, поэтому для внешнего наблюдателя никакого падения вещества звезды на сингулярность попросту быть не может. С другой стороны, в самый момент коллапса сила гравитационного сдавливания нейтронов звезды на много порядков меньше силы их ядерного взаимодействия.

Попробуем выяснить, сможет ли в действительности сила гравитационного притяжения нейтронов на поверхности звезды преодолеть силу их же ядерного отталкивания друг от друга? Кроме того интересно, поместятся ли нейтроны звезды в момент коллапса под её гравитационным радиусом? Ведь если объем коллапсирующей звезды больше, чем начальный размер получившейся Черной дыры, то придётся признать, что излишки будут затянуты под горизонт, то есть упадут на сингулярность. И напротив, если объем звезды поместился под горизонтом, то, видимо, нет никакой необходимости ей падать на сингулярность, она и так создала горизонт событий. При этом дальнейший рост массы Черной дыры за счет поглощения внешнего вещества не вызовет увеличения её радиуса и выход из-под горизонта: гравитационный радиус растёт быстрее, чем радиус нейтронной звезды внутри горизонта событий, причем сила её гравитационного сдавливания по-прежнему будет меньше сил ядерного отталкивания нейтронов.

Для этого вычислим объём выбранной предельной нейтронной звезды на грани её коллапса, перехода в состояние Черной дыры, исходя из известных данных.

Итак, поскольку нейтронная звезда превратилась в Черную дыру, её поверхность теперь находится под горизонтом. Гравитационный радиус в этом случае, по крайней мере, не меньше радиуса нейтронного шара. Посмотрим, как соотносятся объем образовавшейся Черной дыры и объем всех нейтронов, образовавших её при коллапсе исходной нейтронной звезды. Массу такой Черной дыры возьмем равной минимально возможной критической массе в 2,5Mc. Для расчетов берём именно минимальную Черную дыру, поскольку очевидно, что внутри сверхмассивной Черной дыры ядро, что называется, "с головой" поместится под горизонтом. Масса такой Черной дыры равна примерно 5×10^{30} кг.

$$M = 2{,}5Mc = 2{,}5 \times 1{,}99 \times 10^{30} \approx 5 \times 10^{30} kg$$

Такой массе соответствует гравитационный радиус около 7`385 метров, что соответствует объему нейтронной звезды $1{,}7 \times 10^{12}$ м^3. Мы предполагаем, что в момент коллапса нейтроны звезды не упали мгновенно на сингулярность, а смогли за счет сил ядерного отталкивания какое-то время сохранить свою форму. Поэтому в пределах горизонта событий в звезде указанной массы должно поместиться 3×10^{57} нейтронов, каждый из которых имеет объем приблизительно $3{,}69 \times 10^{-46}$ м^3. Следовательно, такое число нейтронов в совокупности могут образовать шар объемом порядка $1{,}1 \times 10^{12}$ м^3 или с учетом плотности упаковки в 74% - $1{,}5 \times 10^{12}$ м^3.

Это весьма примечательный результат. Как видим, даже несжатые, свободно упакованные нейтроны, имеющие такую же массу, как и возникшая Черная дыра, свободно помещаются под её горизонтом: $1{,}7 \times 10^{12} > 1{,}5 \times 10^{12}$. И более того, это удивительный результат: такое невероятное совпадение объёмов – с точностью почти в 10 процентов! Используя его можно предположить, что предел Оппенгеймера-

Волкова имеет вполне конкретное точное числовое значение, а именно 2,3419Мс.

Полученные результаты позволяют сделать еще один примечательный вывод. Следует ожидать, что момент коллапса является, по сути, ничем не примечательным событием в жизни нейтронной звезды. Составляющие её нейтроны лишь немного плотнее "смыкают свои ряды". При этом можно заметить, что плотность нейтронной звезды на этом этапе весьма далека от плотности атомного ядра. То есть, появление сингулярности в этом случае имеет довольно слабое основание.

Действительно, если вычислить соотношение между силой гравитационного притяжения нейтрона в верхнем слое звезды и силу сильного ядерного взаимодействия, то получим соотношение, соответственно, 10^{-14} к 10^{21} кг. То есть, в таком отношении нуклоны в ядре должны притягиваться с большей силой, чем гравитационное притяжение, силой ядерного сильного взаимодействия.

Возникает весьма странная картина: крошечная сила гравитационного притяжения преодолевает намного превосходящие её силы ядерного взаимодействия. Нейтроны в атомном ядре притягиваются с огромной силой, но стоило появиться крошечному гравитационному усилию, как нейтроны сразу же превратились в эфемерный фермионный газ.

Можно ли представить себе картину, когда на двух сцепившихся тяжеловесов, борцов сумо подул легкий ветерок и, что называется, "смял их в лепёшку"? Но для нейтронной звезды утверждается именно такая картина. Сжатие в сингулярность происходит потому, что "твердые как камень" нейтроны вдруг превратились в вырожденный фермионный газ, не способный оказать сопротивление даже ничтожно малому, как показано, гравитационному внешнему давлению. Как видим, сингулярность базируется на очень зыбком фундаменте, на самом деле для образования горизонта событий Черной дыры в ней нет никакой необходимости.

На самом деле гравитационного притяжения нейтронов звездой на много порядков не может хватить даже для того, чтобы они вступили в сильное ядерное взаимодействие, то есть, образовали бы в действительности огромное атомное ядро. Перепрыгивание в сингулярное падение, минуя состояния атомного ядра, выглядит как довольно-таки фантастический вариант. Но это перепрыгивание, как утверждает гипотеза сингулярности, происходит чуть ли не одномоментно. Только что, до коллапса нейтроны на поверхности притягивались к центру звезды с относительно малой силой гравитации, и тут же, в одно мгновение притяжение возросло не просто в 10^{38} раз, а многократно больше.

Кроме того, гипотеза о сжатии до сингулярного состояния опирается фактически на единственный, не очень убедительный постулат, что жесткие нейтроны с некоторым определённым радиусом превратились в пылинки с бесконечно малым объёмом и массой нейтрона, но с некоторой упругой сферической оболочкой, оказывающей слабое давление при сжатии, - вырожденный фермионный газ.

Нуклоны могут притягиваться с силой в 10^{38} раз превосходящей силу гравитации. Эта гипотеза о вырожденном фермионном газе выглядит довольно странно. В ней просматривается модель, в которой каждый элемент газа – молекула или пылинка – имеют массу, сосредоточенную в массивном ядре нулевого объёма, и окружены упругой сферой, которая, собственно, и создаёт давление при сжатии. Сингулярность, возникающая на таком зыбком фундаменте, не может рассматриваться как физическая реальность.

Напротив, есть вполне логичная модель, по которой внутри черной дыры объём вещества не стремится к нулю, поэтому и плотность его также не является бесконечно большой. Давления плотно сжатого вещества, а это уже, очевидно, не вырожденный фермионный газ, вполне достаточно, чтобы удержать его от дальнейшего сжатия. То есть, можно использовать обычные физические законы для описания этого вещества.

Для большей наглядности этот процесс можно показать в виде кадров:

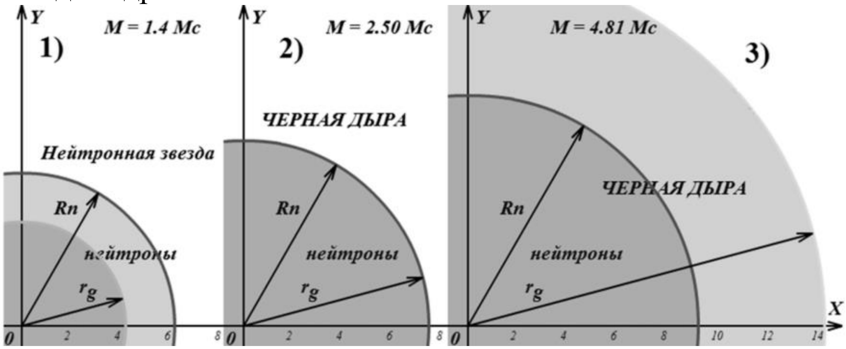


Рис.11. Процесс коллапса нейтронной звезды

На рисунке нейтронный шар звезды просто уходит под горизонт, не меняя своих размеров и не падая на сингулярность. Изначально нейтронная звезда имеет массу 1,4M_c – масс Солнца. В процессе эволюции она поглощает внешнее вещество порциями, и при увеличении её массы до критической она просто исчезает под горизонтом событий. Никакого коллапса в сингулярность для этого не потребовалось.

Главное, что видно на рисунке – для образования горизонта Черной дыры совершенно не нужна никакая сингулярность. Обычный, нормальный объём нейтронов, даже не сжатых до плотности атомного ядра, создаёт тот же самый эффект горизонта. Нужна ли здесь лишняя сущность?

Тем не менее, следует отметить, что эти выводы, строго говоря, неполны. Хотя сингулярность и базируется на очень шатком фундаменте, но, может быть, она всё-таки образуется при дальнейшем росте массы Черной дыры?

В этом случае для того, чтобы возникла сингулярность, необходимо, очевидно, чтобы сила притяжения нейтрона на поверхности нейтронной звезды, по меньшей мере, превышала силу сильного ядерного взаимодействия. Из этого условия можно вычислить радиус "исходной нейтронной звезды" $R_{НЗ}$ до сжатия в сингулярность, своеобразного "атомного ядра" Черной дыры, который оказывается равным $2{,}3 \times 10^{38}$ метров или $2{,}3 \times 10^{22}$ световых лет.

Сразу же возникает вопрос, насколько вероятно увеличение Черной дыры до таких размеров, если радиус наблюдаемой Вселенной меньше и составляет $13{,}7 \times 10^{12}$ лет. Если оценить для справки массу полученной Черной дыры, она должна быть равна 10^{108} кг, а гравитационный радиус такой Черной дыры будет равен 10^{81} метров или 10^{65} св. лет.

Такой результат выглядит весьма нереалистично, такая Черная дыра попросту невозможна. Ведь даже согласно стандартной инфляционной модели теории Большого взрыва, полная масса вещества перед рождением Вселенной должна была превосходить всего лишь 10^{50} т, то есть в 10^{55} раз меньше, а размеры её на много порядков превосходят радиус наблюдаемой Вселенной. На горизонте событий такой Черной дыры вес гири массой в 1 кг будет меньше веса электрона – 3×10^{-66} кГ.

Очевидно, что выйти из-под горизонта такой Черной дыры не представляет труда, но потребует буквально вечности.

О некоторых особенностях горизонта событий

Загадочные Черные дыры вызывают неизменный интерес и регулярно появляются в литературе, учебниках, кинофильмах. Особый интерес вызывает её всепоглощающая способность. Рассматриваются ситуации, когда космолет или даже астронавт падает на горизонт событий Черной дыры и что при этом происходит. Такая ситуация рассмотрена, например, в учебнике "Гравитация" [15], в которой астронавт падает с поверхностью коллапсирующей нейтронной звезды. Участь его незавидна, но есть и другие ситуации, когда падение под горизонт событий не наносит участнику никаких повреждений. Это падение под горизонт событий сверхмассивной Черной дыры. В этом случае смертельно опасные приливные силы настолько малы, что падение становится безопасным.

Если применить уравнения из упомянутого учебника к сверхмассивной Черной дыре в центре нашей галактики Млечный Путь, то можно найти, что на астронавта, находящегося на расстоянии гравитационного радиуса от центра ЧД действует сила притяжения:

$$F = \frac{G\mu M}{r^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11} \times 75 \times 7{,}4 \cdot 10^{36}}{\left(6{,}75\cdot 10^{9}\right)^2} = 8 \cdot 10^8 \, \kappa\Gamma$$

Это огромное усилие возникает, только в случае, если тело неподвижно. Для свободно падающего тела (лифт Эйнштейна) это усилие исчезает, остается только приливная сила. Её разрывное усилие, приложенную к человеку на высоте его роста равно:

$$F = \frac{G\mu M}{r^2} - \frac{G\mu M}{(r+\ell)^2} \approx 0{,}0004 \, \kappa\Gamma$$

Как видим, эта приливная сила имеет ничтожную величину, не представляющую для астронавта никакой опасности. Фактически он находится в невесомости!

Это довольно интересное обстоятельство – невесомость на гравитационном радиусе Черной дыры. Это следует из того, что сила притяжения уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния, и, следовательно, обратно пропорционально массе Черной дыры. Например, груз массой в 1 кг будет весить 1 кГ на горизонте Черной дыры с массой:

$$M_{ЧД} = \frac{c^4}{4G} = \frac{81 \times 10^{32}}{4 \times \ 6{,}67\cdot 10^{-11}} \approx 3 \times 10^{43} kg \approx 3 \times 10^{13} M_c$$

Гравитационный радиус (размеры) такой Черной дыры

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \times \ 6{,}67\cdot 10^{-11} \times 3 \times 10^{43}}{9 \times 10^{16}} \approx 4 \times 10^{15} m \approx 0{,}4 \ \text{св.лет}$$

Конечно, это вряд ли возможная Черная дыра, поскольку она почти в 1000 раз больше массы известного кандидата на сверхмассивную Черную дыру. Считается, что Черные дыры в квазарах, имеющих аккреционные диски, не могут иметь массу больше, чем $5x10^{10}M_C$. Тем не менее, можно обнаружить еще одно интересное свойство сверхмассивных Черных дыр. Существует общепризнанное мнение, что из-под горизонта Черной дыры невозможно ни уйти, ни подать наружу какой-либо сигнал. Однако для вычисленной Черной дыры это правило, похоже, может быть нарушено. На горизонте событий такой Черной дыры действует сила притяжения как на поверхности Земли. Что может помешать световому лучу покинуть его? Есть даже возможность подняться космолету над этим горизонтом.

Почему это так? Рассмотрим следующую гипотетическую ситуацию. Некий космолет попадает под горизонт такой сверхмассивной Черной дыры. Согласно уравнениям теории относительности, величина первой космической скорости будет равна скорости света, поэтому, как утверждается, он не может ни улететь, ни послать световой сигнал наружу. Однако это утверждение имеет несколько иные основания, чем традиционно молчаливо подразумеваемые. На гравитационном радиусе Черной дыры невозможна *стационарная* орбита спутника, поскольку тангенциальная скорость, равная скорости света, для него недостижима. Обращаем внимание: скорость *тангенциальная*, то есть, перпендикулярная к радиусу. В этом, собственно, и состоит смысл первой космической скорости, из которой и определяют гравитационный радиус. Но зададим такой вот странный на первый взгляд вопрос: с какой скоростью должен лететь космолёт, чтобы улететь, например, с Земли? Правильный ответ: с любой ненулевой скоростью, а не со второй космической скоростью. По определению скорость обозначает изменение расстояния между объектами за некоторое время. Если космолёт движется от Земли по радиусу со скоростью 4 км/час, то, очевидно, он рано или поздно покинет не только Землю, но и Солнечную систему.

Это прямо означает, что первая космическая скорость задает условие инерционного (без двигателей) движения по некоторой орбите. Но она не имеет никакого отношения к активному движению – с включенными двигателями – по радиусу. В нашем конкретном случае сверхмассивной Черной дыры на космолет действует сила притяжения, в точности равная таковой на поверхности Земли. Весит он ровно столько, сколько и на Земле. Возникает естественный вопрос: что может помешать звездолету, включив двигатели, подняться вверх, удалиться от центра Черной дыры? Тяга двигателей, очевидно, обеспечит существенно большее усилие, чем притяжение Черной дыры в этой точке.

Конечно, и уйти на бесконечность ему будет непросто: потребуется очень много топлива. Но главное – уйти из-под горизонта такой Черной дыры ему ничто не мешает. И здесь появляется ряд возможностей. Например, уйдя из-под горизонта, космолёт может быть подхвачен спасательным кораблём. Но и находясь под горизонтом, космолёт может спокойно обмениваться радиосигналами с кораблём, находящимся вне горизонта. Описанные в литературе эксперименты с падением на сингулярность приобретают весьма реальные очертания для осуществления. На довольно большом расстоянии под горизонтом сверхмассивной Черной дыры какой-либо зонд может передавать сигналы наружу.

Таким образом, и в этом случае мы находим явные отклонения от общепринятых выводов теории относительности, выявленные её математическими средствами возможности обойти её же запреты: уйти из-под горизонта сверхмассивной Черной дыры и обмениваться сигналами с внешним миром в принципе возможно.

Черная дыра Керра

Принято считать, что у стационарной Черной дыры нет и быть не может никаких внешних характеристик, помимо массы, момента импульса и определённых зарядов. В частности, стационарное, осесимметричное решение для вращающейся чёрной дыры, но без заряда – решение Керра соответствует одному из четырех решений уравнений Эйнштейна. Однако, при всей строгости его получения, оно обнаруживает явные противоречия в самом формализме теории относительности, приводя к неизбежному выводу о невозможность их существования.

Согласно теории относительности для внешнего наблюдателя на горизонте событий Черной дыры время останавливается. Как следствие остановки времени на горизонте событий также останавливается и всякое движение, в том числе и вращение. При этом для наблюдателя, свободно падающего на Черную дыру, ничего не происходит: время течет как обычно и всякое движение в его окрестности продолжается.

Противоречие возникает, если рассмотреть следующий мысленный эксперимент. Пусть у падающего наблюдателя есть циферблатные часы, а скорость вращения Черной дыры в точности равна одному обороту в час. У этого наблюдателя всегда есть возможность направить минутную стрелку своих часов на внешнего наблюдателя таким образом, чтобы стрелка всегда сохраняла своё направление на него. В этом случае возникает противоречие.

Внешний наблюдатель будет видеть, как падающие на Черную дыру часы замедляют свой ход, то есть минутная стрелка движется медленнее, чем один оборот за час. Следовательно, её направление все время будет меняться и уже не будет направлено на внешнего наблюдателя. Получается, что с одной точки зрения стрелка смотрит в одну сторону, а с другой точки зрения – в другую.

Противоречие снимается, если признать, что и скорость вращения при падении часов на Черную дыру также замедляется. Но на самом горизонте часы останавливаются, следовательно, и скорость вращения также становится равной нулю. А это означает, что для внешнего наблюдателя вращение

Черной дыры невозможно, для него такие дыры не существуют.

Голографическая Вселенная

Логические противоречия можно обнаружить в довольно популярной в последние годы гипотезе о виртуальной Вселенной, гипотезе, которая преподносится как прямое следствие научных открытий и гласит, что вся наша Вселенная представляет собой чистую информацию, записанную на поверхности горизонта событий Черной дыры, некую голограмму. Одна из возможных формулировок гипотезы имеет вид:

"Энтропия черной дыры, измеренная в битах, пропорциональна площади ее горизонта, измеренной в планковских единицах" [24, с.157].

Известно, что энтропия системы имеет непосредственную связь с информацией, содержащейся в этой системе, поэтому закономерно появилось более компактное толкование тезиса Бекенштейна:

"Информация равна площади" [24, с.157].

Смысл формулировки означает, что информация, содержащаяся в Черной дыре, *равна* количественно площади её горизонта событий, измеренной в планковских единицах. Чтобы проверить это, рассмотрим две Черные дыры с массой каждой, близкой к минимальной, равной приблизительно 2,3 масс Солнца. Очевидно, что каждая из них содержит один и тот же объём информации, поскольку в противном случае любые рассуждения о её количестве просто теряют смысл. Также очевидно, что обе Черные дыры имеют одинаковую площадь горизонта событий просто потому, что это две *одинаковые* Черные дыры. Таким образом, их суммарный объем информации до и после объединения равен удвоенной информации одной

$$B_{\Sigma} = 2 \times \frac{4\pi}{\ell_{\hbar}^{2}} \left(\frac{4{,}6 \cdot GM_{C}}{c^{2}} \right)^{2}$$

Масса суммарной Черной дыры также удвоится, но площадь горизонта событий увеличится не в два раза, и, соответственно, суммарный объем информации в планковских площадях суммарной Черной дыры составит

$$B_{\Sigma g} = \frac{4\pi}{\ell_{\hbar}^{2}} \left(\frac{2 \times 4{,}6 \cdot GM_{C}}{c^{2}} \right)^{2}$$

Как видим, суммарное количество информации в двух одинаковых Черных дырах не равно количеству информации Черной дыры удвоенной массы

$$\frac{B_{\Sigma}}{B_{\Sigma g}} = \frac{8\pi}{\ell_{\hbar}^{2}} \left(\frac{4{,}6 \cdot GM_{C}}{c^{2}} \right)^{2} : \frac{4\pi}{\ell_{\hbar}^{2}} \left(\frac{2 \times 4{,}6 \cdot GM_{C}}{c^{2}} \right)^{2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2} = \frac{1}{2}$$

Это противоречие, поскольку оба выражения описывают количество информации одной и той же пары слившихся Черных дыр.

Помимо выкладок Сасскинда к похожему противоречивому выводу о пропорциональности приходит и Хокинг, указывая, что Черная дыра имеет энтропию, пропорциональную площади ее горизонта событий [27, с.55]. На вкладке далее он приводит соответствующее уравнение

$$S = \frac{1}{4} A$$

Очевидно, что коэффициент пропорциональности, сама величина А, как заявлено, пропорциональна площади горизонта событий, то есть

$$S = \frac{1}{4} k_{R} R^{2} = \frac{1}{4} k_{m} \frac{4G^{2}}{c^{4}} m^{2} = \frac{k_{m} G^{2}}{c^{4}} m^{2},$$

откуда следует

$$A = \frac{4k_{m} G^{2} m^{2}}{c^{4}}$$

Здесь R – гравитационный радиус Черной дыры массой m, G – гравитационная постоянная, c – скорость света, а k_R и k_m – постоянные, дополнительный коэффициент пропорциональности, учитывающий все другие, возможно, не учтенные параметры Черной дыры.

Как и в предыдущем случае найдем два значения энтропии. Две отдельные одинаковые Черные дыры после слияния должны иметь суммарную энтропию не меньше

$$S_2 = 2 \times \frac{k_m G^2}{c^4} m^2 = 2S = 2 \times \frac{1}{4} A$$

С другой стороны, энтропия суммарной Черной дыры оказывается в два раза больше

$$S_\Sigma = \frac{k_m G^2}{c^4} (2m)^2 = \frac{4 k_m G^2}{c^4} m^2 = 4S = 4 \times \frac{1}{4} A$$

Это противоречие, поскольку оба выражения описывают количество энтропии одной и той же пары слившихся Черных дыр.

Парадокс Эренфеста

Если можно так сказать, то чемпионом по парадоксам является теория относительности. Парадоксы всегда формулируются в виде мысленных экспериментов, то есть, воображаемого эксперимента на основе положений теории. Практически все мысленные парадоксы находят своё непротиворечивое решение в рамках теории. Вместе с тем, один из этих парадоксов, как обнаружено, имеет неверное решение. Это парадокс Эренфеста, упоминаемый обычно как парадокс колеса, хотя автором он был сформулирован в 1909 году для вращающегося цилиндра.

Суть парадокса состоит в том, что при раскручивании цилиндра (или колеса) его внешняя поверхность, обод должны сократиться согласно уравнениям Лоренца. Однако спицы колеса или внутренняя часть цилиндра не испытывают такого сокращения, поскольку расположены поперёк движения. В оригинальном, исходном варианте парадокс для цилиндра Эренфеста описывает в краткой заметке следующим образом:

"а) длина окружности вращающегося цилиндра по сравнению с состоянием покоя должна сократиться:

$$2\pi R' < 2\pi R,$$

поскольку каждый элемент такой окружности движется в направлении касательной с мгновенной скоростью $R'\omega$;

б) мгновенная скорость какого-либо элемента радиуса перпендикулярна его направлению; это значит, что элементы радиуса не подвергаются никакому сокращению по сравнению с состоянием покоя.

Отсюда следует, что $R'=R$" [29, с.38].

Известен также и еще один вариант формулировки парадокса - "поезд Эйнштейна". Состав вагонов можно представить в виде окружности из ряда соединенных сегментов, каждый из которых – вагон поезда или локомотив. Если рассматривать быстрое движение поезда по кругу, то возникает парадокс. Согласно специальной теории относительности при движении по кругу поезд становится короче. Чем быстрее он движется, тем он становится короче. При этом диаметр круга рельсов не изменяется, неизменно число π. Возникает вопрос: почему сокращается длина окружности? Как утверждается, по мнению Эйнштейна искривляется пространство, поэтому и значение числа π становится другим.

Немного иное по содержанию, но похожее по смыслу объяснение приводят Ландау и Лившиц:

"Наблюдая за этим процессом из системы K, мы найдем, что *масштаб, приложенный вдоль окружности, претерпевает лоренцево сокращение, а радиально приложенный масштаб не меняется*. Ясно поэтому, что отношение длины окружности к ее диаметру, полученное в результате такого измерения, окажется больше π" [12, стр.309].

В цитате курсивом выделен важный, принципиальный фрагмент, являющийся едва ли не дословным повторением выводов Эренфеста. То есть, здесь мы вновь видим отчётливо сформулированный парадокс: обод колеса (цилиндра) сократился, а его радиус – нет. Но обратим внимание на фрагмент цитаты "Пусть теперь измерение производится неподвижным относительно K' масштабом". Пожалуй, это предположение является основной причиной ошибочных выводов. Не имеет значения, в какой системе находится вращающийся наблюдатель и имеется ли он там вообще. Наш наблюдатель находится в инерциальной системе, и все парадоксальные эффекты наблюдает именно он. В задаче Эренфеста сравнивают две длины одного и того же отрезка: когда он неподвижен (система инерциальна) и когда на отрезок смотрят и измеряют из этой же неподвижной инерциальной системы. Никаких неевклидовых пространств для него нет. В обоих случаях к отрезку мы прикладываем один и тот же неподвижный измеритель, масштаб. Нас совершенно не интересует, что видит наблюдатель, связанный с ободом или спицами колеса или поверхностью цилиндра Эренфеста. Задача Эренфеста однозначно гласит: диаметр изменился для *неподвижного* наблюдателя. Это один и тот же отрезок, рассматриваемый в два разных момента времени. С точки зрения СТО, как её неверно трактовал Эренфест, после раскрутки цилиндра его радиус одновременно должен быть и большим и малым, что, несомненно, является парадоксом.

Противники, критики теории относительности утверждают, что релятивисты не могут привести никаких объяснений физических причин для объяснения парадокса. Напротив, сторонники теории, объясняя парадокс Эренфеста, приходят к единому мнению: длина окружности сокращается, а радиальный участок – нет. Однако если внимательно присмотреться к этим решениям, то можно обнаружить в них противоречие. Чтобы увидеть его более отчетливо, рассмотрим предельный случай вращающегося объекта - тонкостенный обруч. Он выступает и в роли колеса без спиц, и в роли цилиндра без внутренней части, и в роли поезда, движущегося не по рельсам, а по гладкой поверхности. То есть, формально для сокращения обруча нет никаких механических препятствий. Зададим два вопроса. Первый: если обруч вращается, будет ли сокращаться длина его окружности? Правильный ответ: да. С этим согласны все: Ландау, Лившиц, Эренфест, Эйнштейн и все без исключения сторонники теории относительности.

Вопрос второй: уменьшится ли диаметр вращающегося обруча по отношению к неподвижному состоянию? И здесь правильный ответ: да. Может ли с этим кто-то не согласиться? Действительно, по условиям задачи мы имеем окружность некой длины. На всякий случай уточним второй вопрос и спросим: чем характеризуется окружность? Обычная евклидова окружность, которую можно на его плоскости нарисовать любым раствором циркуля согласно третьему постулату Евклида. Эта характеристика – раствор циркуля, радиус окружности.

Таким образом, у вращающегося обода, являющегося *окружностью*, есть *радиус*. Звучит, конечно, забавно – у окружности есть радиус, следовательно, радиус есть и у раскрученного обруча. Но совсем не забавно звучит вопрос: а чему у обруча этот радиус равен?

У крутящегося круглого обруча есть некий радиус и этот радиус меньше, чем у обруча в неподвижном состоянии. Однако Эренфест, Эйнштейн (видимо), Ландау-Лившиц и многие другие физики утверждают, что радиус у окружности, обруча в данном случае, остался прежним. Вроде как бы у радиуса возникло некое раздвоение личности. Действительно, рассмотрим ситуацию еще более конкретно, с цифрами. Пусть неподвижный обруч имеет радиус 1 метр и, соответственно, длину окружности 2π метра. Другой так же неподвижный обруч с длиной окружности в 1π имеет, соответственно, радиус 0,5 метра. Если раскрутить первый обруч до линейной скорости 0,866c, то длина его окружности, согласно утверждениям всех упомянутых и не упомянутых физиков составит 1π. То есть, мы получаем обруч с длиной окружности 1π. Но что с его формой? Может быть, он изогнулся восьмеркой, как колесо велосипедиста, попавшего в аварию? Или в двойную восьмерку? Или, может быть, он вообще весь покрылся волнами изгибов? Вряд ли кто предположит, что он стал квадратным или вытянулся в прямую линию. Очевидно и бесспорно, что обруч остался такой же плоской окружностью, только меньшего диаметра. Эту окружность – вращающийся обруч можно положить на плоскую хорошо смазанную поверхность и он приложится к ней всеми своими боковыми точками. Если же он хорошо отполирован, то со стороны не будет даже видно, что он вращается. Лежит себе и лежит плоский обруч. Вновь подошедший наблюдатель даже и знать не будет, что он вращается, а раньше был неподвижным, но в два раза большего диаметра. При этом он увидит и второй, неподвижный обруч. А на вопрос, чем эти два обруча отличаются друг от друга, ответит – ничем.

Как мы отметили выше, у такой окружности радиус равен 0,5 метра. Таким образом, свободный обруч, внутри которого нет препятствий, спокойно уменьшает свой диаметр при раскручивании. Это элементарная геометрия, причём определённо евклидова. Утверждать, что у рассмотренного вращающегося обруча с длиной окружности 1π радиус равен 1 метру, нелепо, как нелепо утверждать, что и число π изменило своё значение.

Но что же тогда сократилось? Ведь у обруча нет ни спиц, ни диска внутри. Трудно представить, что кто-то возразит, что у вращающегося обруча радиус остался прежним. Но любой внимательный читатель заметит, что все сказанное относится все-таки не к колесу или цилиндру, а к пустотелому обручу, у которого нет *жесткого* внутреннего радиуса, спиц. Это справедливое замечание и означает оно, что, будь внутри обруча что-то твёрдое, то он не смог бы сократиться, внутренности ему этого просто не позволили бы.

Отчасти это так. Если надеть этот обруч на толстую ось, имеющую диаметр внутренней части обруча, то сократиться ему будет некуда – ось не позволит. А если эта ось тоже вращается? Её внешняя окружность ведь тоже будет сокращаться! Может быть, она сократиться так, что не будет препятствовать сокращению обруча?

И это действительно так.

Рассмотрим особую конструкцию, представляющую собой диск из насаженных друг на друга концентрических тонкостенных обручей, ободов плотно прилегающих друг к другу. Обозначим радиус каждого такого обода R_i. Длина окружности каждого обода, соответственно, $2\pi R_i$. Допустим, нам удалось раскрутить эту конструкцию. Угловая скорость диска ω едина для каждой точки диска и определяет линейную скорость каждого частного обода диска. Тангенциальная скорость каждой точки обода $v_i = \omega R_i$. Сокращенную длину окружности каждого обода определяем по уравнениям Лоренца:

$$L_i = 2\pi R_i \sqrt{1 - v_i^2} \qquad (3)$$

Здесь мы традиционно рассматриваем задачу в системе единиц, в которой скорость света $c = 1$. Рассмотрим два обода: внешний с R_0 и один из внутренних - R_1, пусть $R_1 = kR_0$, где $k = 0\ldots1$. Очевидно, что этот второй обод имеет меньший диаметр и свободно помещается внутри внешнего обода. Из уравнения (3) для каждого обода получаем:

$$L_1 = 2\pi k R_0 \sqrt{1 - \omega^2 k^2 R_0^2} = 2\pi k R_0 \sqrt{1 - k^2 v_0^2}$$

$$L_0 = 2\pi R_0 \sqrt{1 - \omega^2 R_0^2} = 2\pi R_0 \sqrt{1 - v_0^2}$$

Это новые длины окружностей каждого из ободов, поскольку при раскручивании они уменьшили свою длину согласно специальной теории относительности. Следовательно, радиусы их новых окружностей составят:

$$\begin{aligned} R_{1\omega} &= \frac{L_1}{2\pi} = kR_0 \sqrt{1 - k^2 v_0^2} \\ R_{0\omega} &= \frac{L_0}{2\pi} = R_0 \sqrt{1 - v_0^2} \end{aligned} \qquad (4)$$

Найдем отношение радиусов ободов после раскрутки:

$$\frac{R_{1\omega}}{R_{0\omega}}=\frac{kR_0\sqrt{1-k^2v_0^2}}{R_0\sqrt{1-v_0^2}}=k\sqrt{\frac{1-k^2v_0^2}{1-v_0^2}}$$

Это выражение показывает, что отношение радиусов смежных слоёв зависит от скорости вращения. Нас должно заинтересовать, какой может быть скорость вращения, чтобы радиусы, отличающиеся в k раз в неподвижном состоянии, после раскрутки сравнялись. Видимо, это будет предельная скорость, после которой слои начнут давить друг на друга. Вычислим это отношение для указанного условия:

$$\frac{R_{1\omega}}{R_{0\omega}}=k\sqrt{\frac{1-k^2v_0^2}{1-v_0^2}}=1$$

После тривиальных преобразований находим:

$$v_0=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

Очевидно, пересечение, взаимное давление ободов друг на друга может начаться только между соседними ободами, для которых почти k = 1. Следовательно, оно возникает при скорости внешнего обода:

$$v_0=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7$$

Полученное решение означает, во-первых, что наше допущение о возможности раскрутить диск оказалось правомерным. Во-вторых, мы обнаруживаем, что два соседних бесконечно тонких слоя-обода будут давить друг на друга только при их скорости, составляющей более 0,7 от скорости света. А это, в свою очередь, означает, что при раскручивании каждый обод уменьшает как длину своей окружности, так и соответствующий ей радиус. Тем самым здесь же мы обнаруживаем заблуждение в отношении сокращения спиц вращающегося колеса.

В самом деле, каждый расположенный ниже обод вращается со всё меньшей тангенциальной скоростью. Поэтому до скорости 0,7 от скорости света все внутренние ободы будут сокращаться, не препятствуя друг другу! А раз так, то мы может их друг с другом склеить, спаять, сварить или склепать, получив тем самым сплошной диск – колесо.

Впрочем, почему мы утверждаем, что спицы будут сокращаться, ведь в нашей модели спиц нет, колесо сплошное? Так ведь нет никакой разницы: сплошной диск – это тот же диск со спицами, которых просто так много, что они слились в сплошной диск.

Итак, поведение раскручиваемого колеса имеет строго согласованные и непротиворечивые предсказания в специальной теории относительности для всех вариантов парадокса колеса. Строго согласно её предсказаниям спицы испытывают такое же *эквивалентное* лоренцево сокращение, как и обод колеса. Этот эффект можно назвать поперечным эффектом Лоренца. Действительно, выражения (3) и (4) определенно *выглядят* как уравнения преобразований Лоренца для радиуса:

$$R = R_0\sqrt{1 - v_0^2}$$

Понятно, что это всего лишь *следствие* сокращения длины окружности, но совпадение весьма показательно, и именно этот *индуцированный* поперечный эффект Лоренца пытаются опровергнуть все известные авторы.

Можно сказать, что парадокс просуществовал более 100 лет, поскольку впервые рассмотренное решение обнаружено в октябре 2015 года. Изложенное здесь решение парадокса Эренфеста является, видимо, первым корректным решением в рамках специальной теории относительности.

Собственно говоря, все формулировки этого парадокса на самом деле являются просто описанием рядовой задачи специальной теории относительности. Как такового парадокса нет. Корректное и последовательное применение математики СТО позволяет для каждой описанной ситуации сделать непротиворечивые предсказания. Под парадоксом же мы понимаем правильные предсказания, которые противоречат друг другу, но здесь этого нет. В рассмотренном случае следует говорить о парадоксе другого рода: элементарное, в общем-то, решение не просто не заметили серьёзные физики, но и некоторые из них его так и не поняли.

Тахионные парадоксы

В 1973 году в печати вышел "Эйнштейновский сборник", посвященный актуальным проблемам теории относительности и, в значительной степени, проблемам сверхсветовых частиц – тахионов [28]. В том или ином виде в статьях сборника рассмотрены идеи и проблемы сверхсветовых частиц, которые и в наши дни, по прошествии более 40 лет после публикации сборника, поддерживаются практически всеми действующими ныне физическими теориями. В связи с этим следует назвать главной проблемой современной физики замалчиваемое противоречие между *наличием* сверхсветовых корреляций и *запретом* на передачу сверхсветовых сигналов. Тщательный анализ поведения тахионов с позиции специальной теории относительности неизбежно приводит к неразрешимым противоречиям причинно-следственных отношений. Тем не менее, осознавая это, Эйнштейн, тем не менее, считал возможным распространение формализма теории относительности на тахионы и сверхсветовые сигналы:

"...мы вынуждены считать возможным механизм передачи сигнала, при использовании которого достигаемое действие предшествует причине. Хотя этот результат с чисто логической точки зрения и не содержит, по-моему, в себе никаких противоречий, он все же настолько противоречит характеру всего нашего опыта, что невозможность предположения $\omega > c$ представляется в достаточной степени доказанной" [28, с.84].

Приведенная аргументация, как можно заметить, по существу подвергает сомнению принципы причинности. Однако любая, даже потенциальная возможность передачи сверхсветового сигнала между разными ИСО приводит с неизбежностью к крушению специальной теории относительности. Причиной этого является не только то, что выражение под корнем в уравнениях Лоренца становится мнимым, вследствие чего мнимыми становятся масса тахиона, его длина и собственное время. Проблема еще глубже: специальная теория относительности неприменима к сверхсветовым сигналам без того, чтобы делать абсурдные, противоречивые, взаимоисключающие предсказания. Для решения проблем мнимых величин, парадоксов причинности, движения в обратном направлении времени, отрицательного квадрата массы, сверхсветовой синхронизации часов, автоматически разрушающих все преобразования Лоренца, машин времени и вечных двигателей разработан принцип реинтерпретации, тахионная механика.

Между тем, сами по себе сверхсветовые сигналы не создают парадоксов причинности и движения в прошлое. В физике Ньютона они непротиворечивы. И только для специальной теории относительности и теорий, опирающихся на неё, такие парадоксы являются собственным, исключительным свойством, неустранимой особенностью.

Невозможно признать научным принцип реинтерпретации (переключения), положенный в основу тахионной механики [1], продвигаемой как последовательное развитие специальной теории относительности, поскольку вводит в решение задач события, *не имевшие места* в реальности. Механизм реинтерпретации – это искусственный механизм, который, строго говоря, не следует из формализма специальной теории относительности, а базируется на так называемых общефизических принципах. Согласно этому принципу производится изменение последовательности акаузальных событий. Причина, наступившая после следствия, искусственным образом "возвращается на место" изменением энергии взаимодействующих объектов. Если теория предсказывает движение в прошлое частицы с положительной энергией, то производится подмена, реинтерпретация, считающаяся тождественной, замена её на частицу с отрицательной энергией, движущуюся в будущее. В этом случае при обмене сверхсветовыми сигналами принцип реинтерпретации создает ситуацию, когда каждый из участников посылает как свою собственную сверхсветовую частицу, так и античастицу (с отрицательной энергией), которая полностью эквивалентна нормальной частице, которая должна быть ответной частицей, отправленной из будущего в прошлое. Такое исправление нарушенной причинности требует внесения в систему объекта, который физически *не существует*. Каждый из участников точно знает, что он *не отправлял* никакой античастицы.

Причинность является прямым следствием Закона детерминизма. Существует только одно толкование причинно-следственных отношений, любое нарушение которых следует признать ненаучным: никакое следствие без причины невозможно. Никакие аналитические, теоретические построения, а, тем более, реальные физические эксперименты не могут изменить последовательность событий во времени, будь то кротовые норы, Черные дыры, сингулярности и тому подобное. Любые петли времени, перемещение в прошлое являются недопустимыми противоречиями теории, парадоксами, они неизбежно ведут к нарушениям в логике теории.

Вопреки этому, внесение в формализм сверхсветовых сигналов, тахионов неизбежно ведет к таким нарушениям, неразрешимым парадоксам причинности и петель времени, вроде "парадокса дедушки". Вместе с тем, теория относительности вынуждена рассматривать такие сигналы, поскольку в реальном физическом эксперименте обнаружена сверхсветовая корреляция состояний квантовых частиц. Реальный физический переносчик информации о состоянии частиц, квантовой информации пока не обнаружен. Предположение о том, что состояние от одной частицы передается к другой *без носителя*, нелокально, безусловно, является мистикой. Фактически в этом вопросе квантовая механика находится в непримиримом и неустранимом противоречии, антагонизме со специальной теорией относительности, попросту опровергая, разрушая её главный, фундаментальный принцип – второй постулат об инварианте скорости света.

В литературе и интернете можно найти немало примеров мысленных экспериментов, в которых строго логически, в формализме специальной теории относительности демонстрируется возникновение противоречий, абсурдных предсказаний теории как при сверхсветовой коммуникации гипотетическими тахионами, так и при обмене неуловимой квантовой информацией.

Нигде в бескрайнем мироздании мы не найдем, путешествуя даже на звездолете со скоростью мысли, ни машин времени, ни вечного двигателя, ни миров, в которых нарушаются закон детерминизма и причинно-следственные отношения. Даже если среди них не найдется ни одного, где знаменитая книга Виленкина потерпела крах, нигде мы не встретим ни волшебников, ни джиннов и везде сингулярность останется исключительной принадлежностью научно-фантастических учебников физики. Но несмотря ни на что, я с радостью приняли бы приглашение посетить себя самого в прошлом.

Как распутать квантовую запутанность

А, собственно, что она представляет собой, эта неуловимая квантовая информация? Основное несомненно – это вполне конкретные сведения о состоянии квантовой частицы, переданные запутанной с нею паре. Можно уверенно заявить, что никакая информация не может существовать сама по себе, отдельно от всего, витать в воздухе, не имея никакого материального носителя. Любое материальное образование: вещество, плазма, поле, частицы, все они непременно несут в себе ту или иную информацию. И, наоборот, любая известная или неизвестная нам информация обязательно имеет свой собственный носитель в виде вещества, плазмы, поля, частицы. Следовательно, перенос информации от одного объекта к другому – это всегда перенос какого-либо материального носителя. Не существует информации самой по себе.

Вполне возможно, такими соображениями руководствовались и Эйнштейн со своими сотрудниками, формулируя знаменитый ЭПР-парадокс. Рассмотрев поведение запутанных частиц, они выдвинули гипотезу, что состояния их формируются в момент взаимодействия и сохраняются в так называемых элементах физической реальности. Идея, несомненно, разумная. Правда, вывод из неё был сделан в угоду специальной теории относительности, не допускающей перенос информации быстрее скорости света. Поскольку состояния частиц коррелировались со сверхсветовой скоростью, то был сделан вывод: частицы при разделении сохраняют свои коррелированные состояния в этих элементах, которые в дальнейшем стали называть дополнительными переменными или скрытыми параметрами. Вроде бы, всё сходилось: частицы получили свои состояния, запомнили их, а после удаления на большое расстояние друг от друга просто их проявили в процессе измерения.

Однако спустя тридцать лет Белл строго математически показал, что корреляция частиц при наличии скрытых переменных не может быть такой сильной, как это предсказывает квантовая механика. Статистические совпадения состояний оказываются существенно более слабыми. Белл пришел к выводу, что для обеспечения случайного, стохастического совпадения состояний запутанных частиц приборы, которыми измеряются эти состояния, должны обмениваться сверхсветовыми сигналами. Понятно, что такой вывод фактически ничего не прояснил: сверхсветовое взаимодействие всё равно должно присутствовать. Если это не сверхсветовой обмен квантовой информацией, то это сверхсветовой обмен какой-то другой информацией между измерителями.

Ещё через 15 лет Ален Аспект в корректном физическом эксперименте подтвердил: действительно между запутанными квантовыми частицами происходит сверхсветовая корреляция состояний, полностью совпадающая с предположением об обмене ими квантовой информацией. Ну, или обмене сверхсветовыми сигналами между измерительными приборами. Поскольку такие обмены информацией запрещены специальной теорией относительности, их стали называть нелокальными, то есть, противоречащими локальному реализму Эйнштейна, явным образом провозгласившим этот запрет. Частицы ведут себя синхронно, но между ними связи нет. Формально это взаимодействие описывалось законом Малуса:

$$P_{++}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \times \cos^2(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

где:

$\boldsymbol{P}_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ - вероятность обнаружить частицы в синхронном состоянии, например, когда фотоны имеют одинаково направленные спины;

$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ - угол между поляризаторами.

Квантовая механика утверждает, что нелокальные события независимы друг от друга. Однако посмотрим на уравнение Малуса. Мы явно видим произведение двух величин. Если обратиться к формализму классической теории вероятностей, то можно заметить, что это уравнение напоминает теорему умножения вероятностей: "вероятность совместного появления событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, когда первое событие уже наступило".

По поводу первого сомножителя 1\2 мы можем уверенно согласиться, что это "одно из событий", то есть, вероятность обнаружить фотон, измеренный первым в одном из двух равновероятных состояний: поляризация вертикальная или горизонтальная. Вероятность каждого из этих состояний как раз и равна 1\2.

Но формирует ли второе измерение указанную "условную вероятность"? Несомненно, это так. Действительно, второе измерение однозначно предопределено первым. Если первый фотон не измерен, то второй получит одно из возможных состояний с вероятностью 1\2. Угол между поляризаторами в этом случае значения не имеет. Напротив, если первый фотон измерен, то второй получит своё состояние уже с другой вероятностью, которая зависит от угла между поляризаторами. То есть вероятность наступления второго события зависит от первого события.

Более того, по правилам классической теории вероятности:

"Два события A и B называются зависимыми, если появление одного из них изменяет вероятность появления другого" [13].

И наоборот: "Два события считаются независимыми, если вероятность одного из них не зависит от появления или не появления другого события". Совершенно определенно из этого следует зависимость друг от друга двух событий в законе Малуса. Но никакая зависимость не возможна без обмена самой что ни на есть реальной информацией, которая может быть перенесена только материальным носителем. Другими словами, квантовые запутанные частицы, несомненно, обмениваются каким-то материальным носителем. Поскольку обмен происходит быстрее скорости света, то таким носителем квантовой информации может быть, конечно же, тахион.

Тем не менее, в квантовой механике события, описываемые законом Малуса, считаются *независимым*, и при вычислении вероятности наступления совместных событий используется не классическая теория вероятности, а так называемая квантовая теория вероятности:

"Сложение <u>волновых функций</u> (амплитуд вероятностей), а не <u>вероятностей</u> (определяемых квадратами модулей волновых функций) принципиально отличает квантовую теорию от классической статистической теории, в которой для независимых событий справедлива *теорема сложения вероятностей"* [18, с.8].

Конечно, сложение амплитуд вероятностей дает верный результат, но этот механизм никак не проявляет своего отношения к наличию или отсутствию носителя информации.

Просто в угоду специальной теории относительности постулятивно отрицается зависимость событий, которая требует обмена сигналами. Только вот спасти теорию относительности от сверхсветовых проблем это не может. Зависимость непротиворечиво и неизбежно следует из теории вероятностей, справедливость которой никем не ставится под сомнение.

Нелокальность, как средство спасти теорию относительности от причинных парадоксов, - это мистическое синхронное поведение объектов при отсутствии между ними какой бы то ни было связи. Трактовка закона Малуса с позиции классической теории вероятности – это признание сверхсветовой связи между объектами, "призрачное дальнодействие" по Эйнштейну, так сказать, локальный реализм для расширенной локальности.

Однако не следует считать это подменой мистической нелокальности мистикой другого сорта. Сверхсветовой синхронизм поведения – физический факт. Более того, следует ожидать, что этот факт должен проявиться и еще в чём-либо. В любом случае истинность специальной теории относительности под большим вопросом.

Квантовая телепортация

Как считается, никакими измерениями над запутанными парами фотонов передать классическую информацию невозможно. Точно также невозможно *передать* информацию и с помощью квантовой телепортации. Математические описания квантовой телепортации, представленные в литературе, приводятся в несколько упрощённом виде. Здесь мы рассмотрим их ещё в более сжатом виде, поскольку нас интересует другая сторона процесса.

При первом знакомстве с квантовой телепортацией может создаться ложное впечатление о её сходстве с телепортацией, давно известной из художественной научно-фантастической литературы, то есть, перемещением тел, минуя промежуточные положения. Однако такая научно-фантастическая литературная телепортация для квантовой частицы, видимо, может быть осуществлена.

Рассмотрим кратко один из вариантов уравнений классической схемы телепортации с традиционными участниками: Алиса телепортирует Бобу свой кубит в неизвестном состоянии. Обращаем внимание, что в отличие от традиционной, литературной телепортации, в квантовой телепортируется на самом деле не физический объект, а некие *сведения* о его состоянии. Мгновенно и на большое расстояние передаётся так называемая квантовая информация, то есть, произвольное, неизвестное состояние квантовой частицы – кубита, например, $a|0\rangle+b|1\rangle$, при этом результат всегда является неоднозначным. В качестве кубита для телепортации в настоящее время используется фотон.

Обозначим кубит, состояние которого телепортируется, нижним индексом C, а кубиты, принадлежащие Алисе и Бобу, соответственно, индексами A и B. Тогда состояния кубитов, участвующих в телепортации, будут записаны в виде следующих двух уравнений:

$$\left|\Psi_C\right\rangle = \alpha\left|0_C\right\rangle + \beta\left|1_C\right\rangle$$

$$\left|\Psi^{\phi}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_A 0_B\right\rangle + \left|1_A 1_B\right\rangle\right)$$

В процессе телепортации состояния кубитов преобразуются в установке, последовательно принимая различные состояния. Исходное состояние на входе установки описывается следующим уравнением:

$$\left|\Psi_0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha\left|0_C\right\rangle\left(\left|0_A 0_B\right\rangle + \left|1_A 1_B\right\rangle\right) + \beta\left|1_C\right\rangle\left(\left|0_A 0_B\right\rangle + \left|1_A 1_B\right\rangle\right)\right\}$$

На своей стороне Алиса пропускает кубиты через гейт CNOT, что приводит к изменению состояний запутанной частицы Алисы на управляемом входе гейта. Совместное состояние всех трёх частиц принимает, соответственно, вид:

$$\left|\Psi_1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha\left|0_C\right\rangle\left(\left|0_A 0_B\right\rangle + \left|1_A 1_B\right\rangle\right) + \beta\left|1_C\right\rangle\left(\left|1_A 0_B\right\rangle + \left|0_A 1_B\right\rangle\right)\right\}$$

Далее телепортируемый кубит C Алисы пропускается через гейт Адамара H, в результате чего уравнение состояния системы приводится к виду:

$$\left|\Psi_2\right\rangle = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\left|0_A 0_C\right\rangle\left(\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle\right) + \left|0_A 1_C\right\rangle\left(\beta\left|0\right\rangle + \alpha\left|1\right\rangle\right) + \\ \left|1_A 0_C\right\rangle\left(\alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle\right) + \left|1_A 1_C\right\rangle\left(\alpha\left|1\right\rangle - \beta\left|0\right\rangle\right)\end{Bmatrix}$$

Итак, полученное чисто математическими преобразованиями состояние имеет четыре равновероятных исхода. После измерения на стороне Алисы пары кубитов A и C, на стороне Боба будет получено одно из соответствующих состояний в круглых скобках уравнения. Если передать Бобу результаты измерения Алисы 00, 01, 10 или 11, то он сможет произвести над своим кубитом соответствующие унитарные преобразования, в результате которых получит состояние своего кубита, имеющее состояние, сходное с состоянием телепортируемого кубита Алисы.

M_1M_2	Ψ_3	Преобразование	Результат Ψ_4
00	$\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle$	I	$\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle$
01	$\alpha\left|1\right\rangle + \beta\left|0\right\rangle$	X	$\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle$
10	$\alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle$	Z	$\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle$
11	$\alpha\left|1\right\rangle - \beta\left|0\right\rangle$	XZ	$\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle$

Например, результат на стороне Боба, не требующий никаких преобразований - I, соответствует результату измерений на стороне Алисы - 00. Таким образом, мы смогли телепортировать неизвестное состояние частицы Алисы, предварительно передав ему два бита информации по классическому каналу связи.

Однако нас интересует возможность передать состояние без помощи классических каналов связи. Для этого мы создадим еще один или два канала телепортации, по которым попытаемся телепортировать и эти биты. Рассмотрим два специфических состояния телепортируемых битов: $\beta = 0$ и $\alpha = \beta$. Для этих состояний таблица примет следующий вид:

Если внимательно присмотреться к таблице состояний Ψ_3, то можно сделать интересное наблюдение. Телепортируя кубит в *известном* состоянии, мы можем получить на стороне получателя два *различимых* состояния. Действительное, пусть телепортируемый кубит имеет одно из двух состояний, в которых либо $\beta = 0$, либо $\alpha = \beta$. В этих случаях выходным, телепортированными состояниями на стороне Боба будут:

Ψ_3	$\beta = 0$	$\alpha = \beta$
$\alpha\|0\rangle \pm \beta\|1\rangle$	$\|0\rangle$	$\|0\rangle \pm \|1\rangle$
$\alpha\|1\rangle \pm \beta\|0\rangle$	$\|1\rangle$	$\|1\rangle \pm \|0\rangle$

Как видим, в первом случае – это ортогональные состояния, а во втором – в наклонном под 45^o базисе. Подадим этот кубит на управляющий вход гейта CNOT, а на управляемый вход – кубит $|0\rangle$.

$CNOT_{упр}$	$CNOT_{вых}$
$\|0\rangle$	$\|00\rangle$
$\|1\rangle$	$\|11\rangle$
$\|0\rangle + \|1\rangle$	$\|00\rangle + \|11\rangle$
$\|0\rangle - \|1\rangle$	$\|00\rangle - \|11\rangle$

Как показано в таблице, на выходах гейта состояния из второй колонки таблицы будут переведены в пару кубитов $|00\rangle$ или $|11\rangle$, то есть, в одном из ортогональных состояний, а второе – в виде двух *запутанных* кубитов, наклоненных под 45^o. Это две пары различимых состояния. Пропустить выходные сигналы с гейта CNOT через два наклонных под 45о расщепляющих поляризатора. Например, для входного состояния $|10\rangle$ на выходе CNOT получаем функцию в матричном виде:

$$\left|\Psi\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left|11\right\rangle = \left|1\right\rangle \otimes \left|1\right\rangle$$

Это состояние, как видим, не является запутанным, поскольку его можно представить как тензорное произведение. Напротив, для двух других состояний (третья и четвертая строки) после их прохождения через гейт CNOT будет получено состояние в матричном виде:

$$\left|\Psi\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \left|00\right\rangle \pm \left|11\right\rangle \neq \left|\psi_1\right\rangle \otimes \left|\psi_2\right\rangle$$

А вот это состояние уже является запутанным, поскольку его невозможно представить в виде тензорного произведения двух волновых функций.

На выходах поляризаторов установлены два датчика, выходы которых, в свою очередь, подключены к устройству определения совпадений. Возможны 4 варианта совпадения сигналов на выходах датчиков: 00, 01, 10 и 11. Сведем все варианты в таблицу:

Сигнал α = β		Сигнал β =0	
Датчик 1	Датчик 2	Датчик 1	Датчик 2
0	0	0	0
-	-	0	1
-	-	1	0
1	1	1	1

Как видим, датчики в первой паре колонок, соответствующей телепортируемому кубиту α = β, дадут 100% совпадений, а во второй, соответствующей кубиту β = 0, – только 50%. Таким образом, для телепортации двух классических битов, полученных на основной установке телепортации, следует создать ещё два канала телепортации, по которым вспомогательные биты можно передать, задав, например, $\alpha = \beta$ для передачи единицы, или $\beta = 0$ для передачи нуля. Поскольку на выходах измерителей возможны 4 комбинации сигналов, для нижнего уровня достоверности должно производиться, по меньшей мере, измерение 4-х последовательных фотонов.

И здесь возникает важный вопрос: каким же образом неуловимая, неощутимая квантовая информация все-таки вдруг позволила передать информацию классическую, вещественную? По всей видимости, в данном случае удалось использовать единственную лазейку в запрете на клонирование фотона: клонирование фотона в базисном состоянии. Такое клонирование осуществляет гейт CNOT. Эта одна-единственная, буквально крошечная возможность создания клонированного фотона, и допустила возможность передачи классической информации, формально даже и не нарушая теорему о запрете клонирования кубита.

2007 – октябрь-ноябрь 2017

Литература

1. Maccarrone G.D., Recami E., Two-Body Interactions through Tachyon Exchange. \\Nuovo Cimento A, 57, 85.
2. NASA, California Institute of Technology, Milky Way: http://www.spitzer.caltech.edu/uploaded_files/graphics/fullscreen_graphics/0008/5179/ssc2008-10a1_Sm.jpg
3. Бесконечность, Википедия, URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Бесконечность
4. Вейнберг С., Гравитация и космология. – М.: Мир, 1975
5. Виленкин А., Мир многих миров: Физики в поисках параллельных вселенных. — М.: АСТ: Астрель, 2010.
6. Виленкин Н.Я., В поисках бесконечности.— М.: Наука, 1983. 160 с.
7. Гильберт Д., "Основания геометрии", Москва - Ленинград, ОГИЗ, Гос. изд. технико-теоретической лит., 1948г
8. Евклид, "Начала", Москва-Ленинград, ОГИЗ Гос. изд. технико-теоретической литературы,1948 год.
9. Ефимов Н.В., Высшая геометрия. – М.: Наука, 1971
10. Крейг У., Самое начало. Происхождение Вселенной и существование Бога, URL: http://www.otkrovenie.de/beta/xml/other/samoeNachalo.xml
11. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М., Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек, Наука, 2006 г., 539 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. **Т.II**. Теория поля.— 8-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003
13. Лекция 3: Теоремы сложения и умножения вероятностей, http://apollyon1986.narod.ru/docs/TViMS/NP/lekziitv/LEKZIYA3.HTM
14. Лобачевского Геометрия, Научная библиотека, URL: http://www.sernam.ru/book_e_math.php?id=66
15. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, том 3. – М.: "Мир", 1977

16. Муратов Сергей Витальевич, Расшифровка Библии, URL: http://samlib.ru/m/muratow_s_w/biblecode.shtml
17. Новиков И.Д., Эволюция Вселенной. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
18. Огурцов А.Н. Физика для студентов. Квантовая физика. Лекции по физике, URL: http://www.ilt.kharkov.ua/bvi/ogurtsov/lect7quant.pdf
19. Парадокс Гильберта, URL: http://pikabu.ru/story/paradoks_gilberta_1962200
20. Парадокс Гильберта, URL: http://traditio-ru.org/wiki/Парадокс_Гильберта
21. Парадокс Гильберта, Википедия, URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Список_парадоксов
22. Пономарь В.В., Данные вояджеров подтвердили стационарность теоцентрической системы строения мира, URL: http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/15307.html
23. Попов А.Г., Псевдосферические поверхности и некоторые задачи математической физики, МГУ им. М. В. Ломоносова, Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 227—239. © 2005
24. Сасскинд Л., Битва при Черной дыре. Мое сражение со Стивеном Хокингом за мир, безопасный для квантовой механики. — СПб.: Питер, 2013. — 448 с.
25. Фома Аквинский, Сумма теологии. Т1-3. – Киев: Эльга, Ника-Центр. М.: Элькор-МК, 2002
26. Хокинг С., Млодинов Л. - Высший замысел. - СПб. Амфора, 2013, 208 стр.
27. Хокинг С., Пенроуз Р., Природа пространства и времени. — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика"
28. Эйнштейновский сборник. 1973, М., Наука, 1974
29. Эренфест П. - Относительность. Кванты. Статистика: Сборник статей. – М.: Наука, 1972, с.38

Путенихин П.В.
Логика противоречий

Типография «АМИРИТ»
410004, Россия, г.Саратов, ул.Чернышевского, д.88, литер У

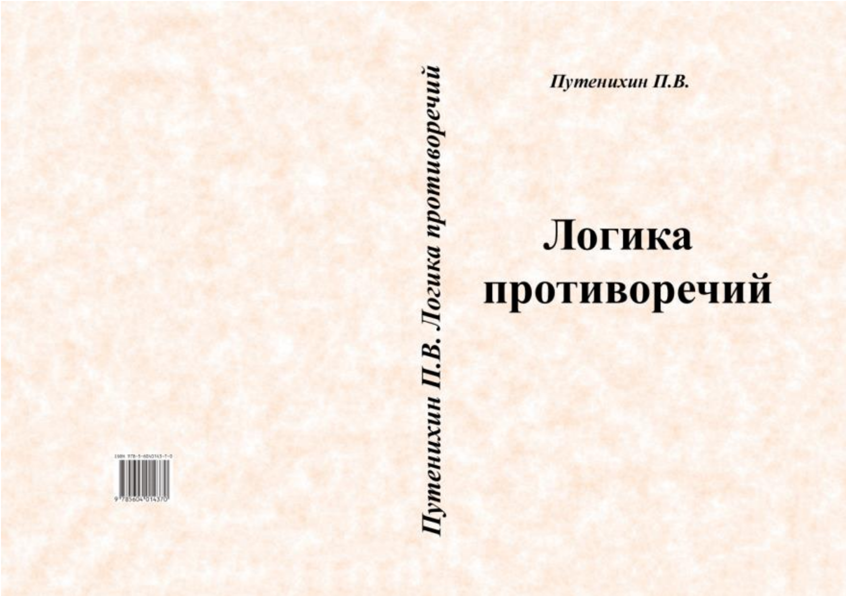
Тел./факс: 8(8452) 24-86-33
Сайт: amirit.ru
Почта: zakaz@amirit.ru

ISBN 978-5-6040143-7-0

9 785604 014370

Подписано в печать 16.11.2017 г.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Times New Roman.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 7,73. Тираж 26 экз.
Заказ № 12/16117.

Отпечатано в соответствии с предоставленными
материалами в ООО «Амирит»,
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 88.
Тел.: 8-800-700-86-33 | (845-2) 24-86-33
E-mail: zakaz@amirit.ru Сайт: amirit.ru


Путенихин П.В. Логика противоречий
Путенихин П.В.
Логика
противоречий