Имре Лакатос
Lakatos Imre

Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы.

(Пер. с англ. И. Н. Веселовского. М., Наука, 1967. 152 с.)

Эта книга, посвященная проблемам математической логики, написана легко, увлекательно и остроумно в виде разговора учителя с учениками, разбирающими доказательства знаменитой теоремы Эйлера о многогранниках и получающихся при этом парадоксах. Ошибки, которые делают ученики, в действительности были допущены различными математиками XIX в., что раскрывается в подстрочных примечаниях, дающих полную историю вопроса. Книга может быть прочитана не только математиками, она вполне доступна школьникам старших классов.

Введение

В истории мысли часто случается, что при появлении нового мощного метода быстро выдвигается на авансцену изучение задач, которые этим методом могут быть решены, в то время как все остальное игнорируется, даже забывается, а изучением его пренебрегают.

Именно это как будто произошло в нашем столетии в области философии математики в результате стремительного развития метаматематики.

Предмет метаматематики состоит в такой абстракции математики, когда математические теории заменяются формальными системами, доказательства — некоторыми последовательностями хорошо известных формул, определения — «сокращенными выражениями», которые «теоретически необязательны, но зато типографически удобны»[1].

Такая абстракция была придумана Гильбертом, чтобы получить мощную технику исследования задач методологии математики. Вместе с тем имеются задачи, которые выпадают из рамок метаматематической абстракции. В их числе находятся все задачи, относящиеся к «содержательной» математике и ее развитию, и все задачи, касающиеся ситуационной[*] логики и решения математических задач.

Школу математической философии, которая стремится отождествить математику с ее метаматематической абстракцией (а философию математики — с метаматематикой), я буду называть «формалистской» школой. Одна из самых отчетливых характеристик формалистской позиции находится у Карнапа (1937)[2]. Карнап требует, чтобы (а) философия была заменена логикой науки..., но (в) «логика науки представляет не что иное, как логический синтаксис языка науки»..., (с) «метаматематика же является синтаксисом математического языка» (стр. XIII и 9). Итак, философию математики следует заменить метаматематикой.

Формализм отделяет историю математики от философии математики, так как согласно формалистскому пониманию математики, собственно говоря, истории математики не существует. Любой формалист целиком будет согласен с замечанием Рассела, высказанным «романтически», но сделанным вполне серьезно, что «Законы мысли» Буля (Boole, 1854) были «первой книгой, когда-либо написанной по математике»[3]. Формализм отрицает статус математики для большей части того, что обычно понималось как входящее в математику, и ничего не может сказать об ее «развитии». Ни один из «творческих» периодов и вряд ли один из «критических» периодов математических теорий может быть допущен в формалистическое небо, где математические теории пребывают как серафимы, очищенные от всех пятен земной недостоверности. Однако формалисты обычно оставляют открытым небольшой черный ход для падших ангелов; если для каких-нибудь «смесей математики и чего-то другого» окажется возможным построить формальные системы, «которые в некотором смысле включают их», то они могут быть тогда допущены. При таких условиях Ньютону пришлось прождать четыре века, пока Пеано, Рассел и Куайн (Quine) помогли ему влезть на небо, формализовав его исчисление бесконечно малых. Дирак оказался более счастливым: Шварц спас его душу еще при его жизни. Может быть, мы должны упомянуть здесь парадоксальное затруднение метаматематика: по формалистским или даже по дедуктивистским стандартам он не является честным математиком. Дьёдонне говорит об «абсолютной необходимости для каждого математика, **который заботится об интеллектуальной честности** (выделение мое.— Авт.), представлять свои рассуждения в аксиоматической форме» (1939, стр. 225).

---

1 См. Чёрч (Church) (1956), 1, стр. 76—77. Также у Пеано (1894), стр. 49 и у Уайтхеда — Рассела (1910—1913), 1, стр. 12. Это интегральная часть евклидовой программы, формулированной Паскалем (1657—1658); ср. Лакатос (1962), стр. 158.

* Ситуационная логика — принадлежащий, по-видимому, Попперу малораспространенный термин, обозначающий логику продуктивную, логику математического творчества.— Прим. пер.

2 Подробности и аналогичные ссылки см. в библиографическом списке в конце статьи.

3 Б. Рассел (B. Russel, 1901). Эта работа была перепечатана как 5-я глава труда Рассела (1918) под заглавием «Математика и метафизика». В издании «Пингвина» (1953) цитату можно найти на стр. 74. В предисловии к труду (1918) Рассел говорит об этой работе: «Тон этого очерка отчасти объясняется тем, что издатель просил меня сделать его „сколь возможно романтическим"».

При современном господстве формализма невольно впадаешь в искушение перефразировать Канта: история математики, лишившись руководства философии, сделалась **слепой**, тогда как философия математики, повернувшись спиной к наиболее интригующим событиям истории математики, сделалась **пустой**.

«Формализм» представляет крепость логической позитивистской философии. Если следовать логическому позитивизму, то утверждение имеет смысл только, если оно является «тавтологическим» или эмпирическим. Так как содержательная математика не является ни «тавтологической», ни эмпирической, то она должна быть бессмысленной, она — чистый вздор[4]. Догматы логического позитивизма гибельны для **истории и философии математики**.

Целью этих статей является подход к некоторым проблемам **методологии математики**. Я употребляю слово «методология» в смысле, близком к «эвристике»[5] Полья и Бернайса и к «логике открытия» или «ситуационной логике» Поппера[6]. Недавняя экспроприация термина «методология математики» для использования в качестве синонима «метаматематики» имеет несомненно формалистский привкус. Это показывает, что в формалистской философии математики нет настоящего места для методологии как логики открытия[7]. Если верить формалистам, то математика

---

[4] Согласно Тюркетту (Turquette), положения Геделя не имеют смысла (1950), стр. 129. Тюркетт спорит с Копи (Copi), который считает, что, поскольку эти положения являются «априорными истинами», но не аналитическими, то они опровергают аналитическую теорию априорности (1949) и (1950). Никто из них не замечает, что особый статус положений Геделя с этой точки зрения состоит в том, что эти теоремы являются теоремами неформальной содержательной математики и что в действительности они оба обсуждают статус неформальной математики в частном случае. Они также не замечают, что теории неформальной математики определенно являются догадками, которые с точки зрения догматиста вряд ли возможно разделить на догадки a priori и a posteriori.

[5] Polya (1945), в особенности стр. 102 и также (1954), (1962a); Bernays (1947), в особенности стр. 187.

[6] Popper (1934), затем (1945), в особенности стр. 90 в четвертом издании (1962, стр. 97), а также (1957), стр. 147 и сл.

[7] Это можно иллюстрировать работами Тарского (1930a) и (1930b). В первой статье Тарский пользуется термином «дедуктивные науки» явно как стенографическим выражением для «формализованных дедуктивных наук». Он говорит: «Формализованные дедуктивные дисциплины составляют поле исследований метаматематики примерно в том же смысле, как пространственные сущности составляют поле исследований для геометрии». Этой разумной формулировке придается занятный империалистический уклон во второй статье. «Дедуктивные дисциплины составляют предмет (subjectmatter) методологии дедуктивных наук примерно в таком же смысле, в каком пространственные сущности составляют предмет геометрии, а животные — зоологии. Естественно, не все дедуктивные дисциплины представляются в форме, подходящей для объектов научного исследования. Неподходящими будут, например, такие, которые не опираются на определенный логический базис, не имеют точных правил вывода (inference) и в которых теоремы формулируются в обычных двусмысленных и неточных терминах разговорного языка — одним словом, те, которые не формализованы. Метаматематические исследования, таким образом, сводятся к рассмотрению лишь формализованных дедуктивных дисциплин». Нововведением является то, что в первой формулировке устанавливается, что предметом метаматематики являются формализованные дедуктивные дисциплины, в то время как вторая говорит, что предмет метаматематики сводится к формализованным дедуктивным дисциплинам только по той причине, что неформализованные дедуктивные дисциплины вообще не являются подходящим предметом научного исследования. Это предполагает, что предыстория формализованной дисциплины не может быть предметом научного исследования, в то время как, наоборот, предыстория зоологического вида вполне может быть предметом научной теории эволюции. Никто не будет сомневаться, что к некоторым проблемам, касающимся математической теории, можно подойти только после того, как они будут формализованы, совершенно так же, как некоторые проблемы относительно человеческих существ (например, касающиеся их анатомии) могут быть изучаемы только после их смерти. Но на этом основании не многие будут утверждать, что человеческие существа будут «пригодны для научного исследования», только когда они «представляются в мертвом виде», и что, следовательно, биологические исследования сводятся к изучению мертвых человеческих существ, хотя я не был бы изумлен, если бы какой-нибудь энтузиаст — ученик Везалия в славные дни ранней анатомии, когда появились новые мощные методы диссекции, отождествил биологию с анализом мертвых тел.

В предисловии к работе (1941) Тарский подчеркивает свое отрицание возможности какой-будет тождественна формализованной математике. Но что можно **открыть** в формализованной теории? Два ряда вещей. **Во-первых**, можно открыть решение задач, которые машина Тюринга при подходящей программе может решить за конечное время (как, например, будет ли некоторое предложенное доказательство действительно доказательством или нет?). Ни один математик не заинтересован в том, чтобы следить за этим скучным механическим «методом», предписываемым процедурами такого решения. **Во-вторых**, можно найти решения задач вроде: будет ли теоремой или нет некоторая формула теории, в которой не установлена возможность окончательного решения, где можно руководствоваться только «методом» неуправляемой интуиции и удачи.

Так вот, для живой математики непригодна эта мрачная альтернатива машинного рационализма и иррационального отгадывания вслепую[8]. Исследование **неформальной** математики дает творческим математикам богатую ситуационную логику, которая не будет ни механической, ни иррациональной, но которая никак не может получить признания, тем более поощрения формалистской философии.

История математики и логика математического открытия, т. е. филогенез и онтогенез [9] математической мысли, не могут быть развиты без критицизма и окончательного отказа от формализма.

Но формалистская философия математики имеет очень глубокие корни. Она представляет последнее звено в длинной цепи догматистских философий математики. Ведь уже более двух тысяч лет идет спор между **догматиками** и **скептиками**. Догматики утверждают, что силой нашего человеческого интеллекта и чувств, или только одних чувств, мы можем достичь истины и узнать, что мы ее достигли. Скептики, с другой стороны, или утверждают, что мы совершенно не можем достичь истины (разве только при помощи мистического эксперимента), или что если даже сможем достичь ее, то не можем знать, что мы ее достигли. В этом большом споре, в котором время от времени аргументы осовременивались, математика была гордой крепостью догматизма. Всякий раз, когда математический догматизм попадал в «кризис», какая-нибудь новая версия снова придавала ему подлинную строгость и настоящие основы, восстанавливая образ авторитарной, непогрешимой, неопровержимой математики — «единственной науки, которую Бог захотел дать человечеству» (Гоббс, 1651). Большая часть скептиков примирилась с

нибудь методологии, отличной от формальных систем: «Курс методологии эмпирических паук... должен главным образом состоять из оценок и критик скромных попыток и безуспешных усилий». Причина заключается в том, что, поскольку Тарский определяет научную теорию «как систему подобранных утверждений, расположенных в соответствии с некоторыми правилами» (там же), то эмпирические науки не являются науками.

8 Одно из наиболее опасных заблуждений сторонников формалистской философии заключается в том, что (1) они стараются установить что-нибудь (вполне правильно) относительно формальных систем; (2) затем сказать, что это применимо и к «математике» — это будет опять правильно, если мы примем отождествление математики с формальными системами; (3) наконец, со скрытым изменением смысла, использовать термин «математика» в обычном смысле. Так, Куайн говорит (1951, стр. 87), что «это отражает характерную для математики ситуацию; математик наталкивается на свое доказательство при помощи неуправляемой интуиции и „счастья", а затем другие математики могут проверить его „доказательство"». Но проверка **обычного** доказательства часто представляет очень деликатное предприятие, и, чтобы напасть на «ошибку», требуется столько же интуиции и счастья, сколько и для того, чтобы натолкнуться на доказательство; открытие «ошибок» в неформальных доказательствах иногда может потребовать десятилетий, если не столетий.

9 Пуанкаре и Полья предлагают «основной биологический закон» Геккеля относительно онтогенеза, повторяющего филогенез, применять также и к умственному развитию, в частности, к математическому умственному развитию [Пуанкаре (1908), стр. 135 и Полья (1962b)]. Цитируем Пуанкаре: «Зоологи утверждают, что эмбриональное развитие животного повторяет всю историю его предков в течение геологического времени. По-видимому, то же происходит и в развитии ума... По этой причине история науки должна быть нашим первым руководителем».

неприступностью этой крепости догматистской теории познания[10]. Бросить этому вызов — давно уже стало необходимым.

Цель этого этюда и есть этот вызов математическому формализму, но это не прямой вызов основным положениям математического догматизма. Наша скромная цель состоит в установлении положения, что неформальная квазиэмпирическая математика не развивается как монотонное возрастание количества несомненно доказанных теорем, но только через непрерывное улучшение догадок при помощи размышления и критики, при помощи логики доказательств и опровержений. Поскольку, однако, метаматематика представляет парадигму неформальной квазиэмпирической математики и в настоящее время находится в быстром росте, то эта статья тем самым бросает вызов современному математическому догматизму. Исследователь недавней истории метаматематики найдет на его собственном поле описанные здесь образцы.

Диалогическая форма должна отразить диалектику рассказа; она должна содержать своего рода **рациональнo реконструированную или «дистиллированную» историю. Реальная история будет звучать в подстрочных примечаниях, большая часть которых поэтому должна быть рассматриваема как органическая часть статьи.**

1. Задача и догадка

Диалог происходит в воображаемой классной комнате. Класс заинтересовался **задачей**: существует ли соотношение между числом V вершин, числом E ребер и, наконец, числом F граней многогранника — в частности, **правильного многогранника** — аналогично тривиальному соотношению между числами вершин и сторон **многоугольников**, а именно: что существует столько же сторон, сколько и вершин: V = E? Последнее соотношение позволяет классифицировать **многоугольники** по числу сторон (или вершин): треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д. Аналогичное соотношение поможет классификации **многогранников**.

После большого количества испытаний и ошибок класс замечает, что для всех правильных многогранников $V-E+F=2$[11].

[10] По поводу дискуссии относительно роли математики в догматико-скептическом споре см. мою работу (1962).

[11] Впервые замечено Эйлером (1750). Первоначальной его задачей было дать классификацию многогранников. На трудность этого было указано в заключении издателя: «В то время как в плоской геометрии многоугольники (figurae rectilineae) легко могут быть классифицированы по числу сторон, которое, конечно, всегда будет равно числу углов, в стереометрии классификация многогранников (corpora hedris planis inclusa) представляет собой значительно более трудную задачу, так как только одно число граней недостаточно для этой цели». Ключом к полученному Эйлером результату было как раз введение понятий **вершины** и **ребра**; он первый указал на то, что кроме числа граней число **точек** и **линий** на поверхности многогранника определяет его (топологический) характер. Интересно отметить, что, с одной стороны, он очень хотел подчеркнуть новизну его концептуальной основы и что ему пришлось изобрести термин «acies» (ребро) вместо старого «latus» (сторона), так как «latus» было понятием, относящимся к многоугольникам, тогда как ему нужно было ввести понятие, относящееся к многогранникам; с другой стороны, он все же удержал термин «**angu1us so1idus**» (телесный угол) для подобных точке вершин. С недавнего времени стали считать, что приоритет в этом деле принадлежит Декарту. Основанием этого притязания является рукопись Декарта (ок. 1639), скопированная с оригинала Лейбницем в Париже в 1675—1676 гг. и снова открытая и опубликованная Foucher de Careil в 1860 г. Однако приоритет Декарту отдать нельзя. Верно, что Декарт устанавливает, что число плоских углов равно $2\varphi+2\alpha-4$, где φ обозначает у него число граней, а α — число телесных углов. Также верно то, что он устанавливает, что плоских углов вдвое больше, чем ребер (latera). Простое соединение двух этих положений, конечно, даст формулу Эйлера. Но Декарт не видел надобности сделать это,

Кто-то высказывает **догадку**, что это может быть приложимым к любому многограннику. Другие пытаются оспорить эту догадку, испытать ее многими разными способами — она выдерживает хорошо. Этот результат **подкрепляет** догадку и наводит на мысль, что она может быть доказана. В этот момент — после стадий постановки **задачи** и **догадок** — мы входим в классную комнату[12]. Учитель как раз готовится дать **доказательство**.

2. Доказательство

Учитель. На нашем последнем уроке мы пришли к догадке относительно многогранников, а именно: что для всех многогранников $V - E + F = 2$, где V — число вершин, E — число ребер и F — число граней. Мы испытали ее различными способами. Но мы пока еще не доказали ее. Может быть, кто-нибудь нашел доказательство?

Ученик Сигма. Я со своей стороны должен сознаться, что пока еще не придумал строгого доказательства этой теоремы... Однако истинность ее была установлена в очень многих случаях, и не может быть сомнения, что она справедлива для любого тела. Таким образом, это предложение, по-видимому, доказано вполне удовлетворительно[13]. Но если у вас есть доказательство, то, пожалуйста, дайте его.

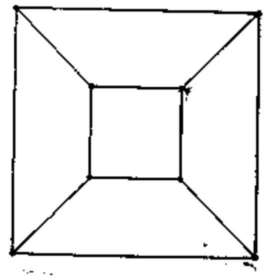


Рис. 1

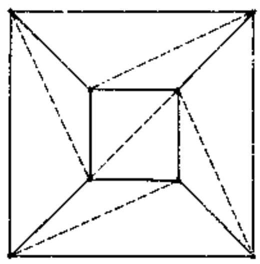


Рис. 2

Учитель. Действительно, я его имею. Оно состоит в следующем мысленном эксперименте. **Первый шаг**. Вообразим, что многогранник будет полым с поверхностью из резины. Если мы вырежем одну из его граней, то всю остальную поверхность мы можем, не разрезая, растянуть на плоской доске. Грани и ребра будут деформироваться, ребра могут стать криволинейными, но V, E и F не изменятся, так что если и только если $V - E + F = 2$ для первоначального многогранника, то $V - E + F - 1$ для этой плоской сети — вспомните, что мы одну грань удалили. (На рис. 1 показана такая сеть для куба.) **Второй шаг**. Теперь мы стриангулируем нашу карту — она действительно выглядит как географическая

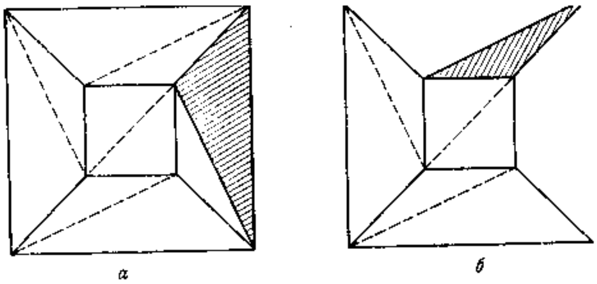
так как он все же мыслил в терминах углов (плоских и телесных) и граней и не сделал сознательного революционного изменения, а именно: не ввел понятия нуль-мерных вершин, одномерных ребер и двумерных граней в качестве необходимого и достаточного основания для полной топологической характеристики многогранников.

[12] Эйлер проверил свою догадку достаточно исчерпывающим образом. Он испытал ее на призмах, пирамидах и т. д. Он мог бы добавить, что существование только пяти правильных тел тоже является следствием его догадки. Другое подозреваемое следствие представляет недоказанное до сих пор предложение, что четырех цветов вполне достаточно для раскрашивания карты.

Фазы **догадки и испытания** в случае $V—E+F=2$ разобраны Полья (1954), т. 1 (первые пять отделов третьей главы, стр. 35—41). Полья остановился здесь и не разобрал фазы **доказательства**, хотя, конечно, он указал на необходимость для эвристики «задач для доказательства». Наше рассуждение начинается там, где Polya останавливается.

[13] Так думал Эйлер в 1750 г. (стр. 119 и 124). Но позднее (1751) он предложил доказательство.

карта. Проведем (может быть, криволинейные) диагонали в тех (может быть, криволинейных) многоугольниках, которые еще не являются (может быть, криволинейными) треугольниками. Проведя каждую диагональ, мы увеличиваем и E и F на единицу, так что сумма V — E + F не изменится (рис. 2).



а б

Рис. 3

Третий шаг. Теперь будем вынимать из триангулированной сети треугольники один за другим. Вынимая треугольник, мы или вынимаем ребро, причем исчезают одна грань и одно ребро (рис. 3, а), или вынимаем два ребра и вершину; тогда исчезают одна грань, два ребра и одна вершина (рис. 3, б). Таким образом, если V — E + F = 1 до выемки треугольника, то оно останется таким же и после выемки. В конце этой процедуры мы получаем один треугольник. Для него V — E + F = 1 является справедливым. Таким образом, мы доказали нашу догадку[14].

Ученик Дельта. Вы должны назвать это теперь **теоремой**. Теперь здесь уже нет ничего из области догадок[15].

Ученик Альфа. Не знаю. Я вижу, что этот эксперимент можно выполнить с кубом или с тетраэдром, но как я могу знать, что его можно произвести с **любым** многогранником. Кстати, уверены ли вы, сэр, что **всякий многогранник после устранения одной грани может быть развернут плоско на доске**? У меня есть сомнения относительно вашего первого шага.

Ученик Бета. Уверены ли вы, что **при триангулировании карты вы всегда получите новую грань для любого нового ребра?** У меня есть сомнения относительно вашего второго шага.

Ученик Гамма. Уверены ли вы, что **когда вы будете откидывать треугольники один за другим, то получатся только две альтернативы — исчезновение одного ребра или же двух ребер и одной вершины?** Уверены ли вы также, что **в конце процесса останетесь только с одним треугольником?** У меня есть сомнения относительно вашего третьего шага[16].

Учитель. Конечно, я не уверен.

Альфа. Но ведь это еще хуже, чем раньше. Вместо одной догадки, мы теперь имеем по меньшей мере три! И вы называете это «доказательством»!

Учитель. Я допускаю, что традиционное название «доказательство» для этого мысленного эксперимента, пожалуй, не совсем подходит. Я не думаю, что этот эксперимент устанавливает истинность догадки.

---

[14] Идея этого доказательства восходит к Коши (1811).

[15] Мнение Дельты, что это доказательство установило «теорему», вне всякого сомнения, разделялось многими математиками XIX в., например Crelle (Crelle, 1826—1827), т. II, стр. 668—671, Маттисеп (Matthiesen, 1863), стр. 449, Жонкьер (Jonquieres, 1890a и 1890b). Стоит привести характерный пассаж: «После доказательства Коши стало абсолютно несомненным, что изящное соотношение V — E + F = 2 применимо к многогранникам любога вида, как и установил Эйлер в 1752 г. В 1811 г. вся нерешительность должна была исчезнуть» [Жонкьер (1890), стр. 111—112].

[16] Этот класс, по-видимому, очень передовой. Для Коши, Пуансо и многих других прекрасных математиков XIX в. эти вопросы не существовали.

Дельта. Ну а что же он тогда делает? Что же, по-вашему, доказывает математическое доказательство?

Учитель. Это тонкий вопрос, на который мы попытаемся ответить позже. До тех пор я предлагаю сохранить освященный временем технический термин «доказательство» **для мысленного эксперимента, или квазиэксперимента, который предлагает разложение первоначальной догадки на вспомогательные догадки или леммы**, таким образом **впутывая ее**, может быть, в совершенно далекую область знания. Например, наше «доказательство» в первоначальную догадку — о кристаллах, или, скажем, о твердых телах — включило теорию резиновых листов. Декарт или Эйлер, отцы первоначальной догадки, наверняка ни о чем подобном не думали [17].

---

[17] Мысленный эксперимент (deiknymi) был наиболее древним образом математического доказательства. Он преобладал в доевклидовой греческой математике [см. Шабо (A. Szabo, 1958)].

То, что в эвристическом порядке догадки (или теоремы) предшествуют доказательствам, было общим местом у древних математиков. Это вытекает из эвристического предшествования «**анализа**» «**синтезу**» [см. прекрасный разбор у Робинсона (Robinson, 1936)]. По Проклу — «необходимо сначала знать, что ищешь» [Хизс (Heath, 1925, т. 1, стр. 129)]. «Они говорили, что теорема представляет то, что предложено с намерением доказать это предложение», — говорит Папп (там же, т. 1,10). Греки не думали много о предложениях, на которые они случайно наталкивались по ходу дедукции, если только предварительно о них не догадывались. Они называли **поризмами** — следствиями — те побочные результаты, которые получались из доказательства теоремы или решения задачи, результаты которых они непосредственно не искали; эти поризмы появлялись в таком виде случайно, без каких-нибудь добавочных трудов, и представляли, как говорит Прокл, нечто вроде плода, сбитого ветром (ermaion) или премии (kerdos) (Там же, стр. 278). В издательском послесловии к Эйлеру (1753) мы читаем, что арифметические теоремы «бывали открыты задолго до того, как их истинность была подтверждена строгим доказательством». Как Эйлер, так и издатель для этого процесса открытия употребляют новейший термин «**индукция**» вместо древнего «analysis». Эвристическое предшествование результата перед аргументацией или теоремы перед доказательством глубоко укоренилось в математическом фольклоре. Приведем несколько вариаций на знакомую тему: говорят, что Хризипп написал Клеанфу: «Пришли только мне теоремы и тогда я найду доказательства» [Диоген Лаэрций (ок. 200), VII, 179], Говорят, что Гаусс жаловался: «Я уже давно имел мои результаты, но я еще не знаю, как мне к ним прийти» [см. Арбер (Arber, 1954), стр. 77)] и Риман: «Если бы я только имел теоремы! Тогда я смог бы достаточно легко найти доказательства» [См. Гёльдер (Holder, 1924), стр. 487]. Полья подчеркивает: «Вы должны угадать математическую теорему, прежде чем вы ее докажете» [(1954), т. 1, стр. VI].

Термин «квази-эксперимент» взят из вышеупомянутого издательского послесловия к Эйлеру (1753). Издатель пишет: «Поскольку мы должны отнести числа к области одного лишь чистого интеллекта, то нам трудно понять, каким образом наблюдения и квази-эксперименты могут быть полезными при исследовании природы чисел. Как я покажу здесь при помощи очень хороших доводов, известные в настоящее время свойства чисел действительно были большей частью открыты наблюдением...». Полья по ошибке приписывает эту цитату самому Эйлеру (1954, т. 1, стр. 3).

3. Критика доказательства при помощи контрапримеров, являющихся локальными, но не глобальными

Учитель. Подсказанное доказательством разложение догадки открывает новые горизонты для проб. Это разложение более широким фронтом развертывает догадку, так что наш дух критики получает большее количество целей. Мы теперь вместо одной имеем по меньшей мере три возможности для контрапримеров.

Гамма. Я уже выразил мое несогласие с вашей третьей леммой (а именно, что при вынимании треугольников из сети, получившейся после растягивания и последующей триангуляции, мы имеем только две возможности: мы убираем или только одно ребро, или же два ребра с вершиной). Я подозреваю, что при удалении треугольника могут появиться и другие возможности.

Учитель. Подозрение — это еще не критика.

Гамма. А **контрапример** будет критикой?

Учитель. Конечно. Догадкам нет дела до несогласий или подозрений, но они не могут игнорировать контрапримеры.

Тета (в сторону). Догадки, очевидно, сильно отличаются от тех, кто их представляет.

Гамма. Я предлагаю очень простой контрапример. Возьмем триангуляционную сеть, которая получилась после проведения на кубе двух первых операций (см. рис. 2). Теперь, если я удалю треугольник **изнутри** этой сети, как можно вынуть кусок из головоломки, то я вынимаю только один треугольник без удаления каких-нибудь ребер или вершин. Таким образом, третья лемма неверна — и не только в случае куба, но для всех многогранников, кроме тетраэдра, для которого в плоской сети все треугольники будут граничными. Таким образом, ваше доказательство доказывает теорему Эйлера для тетраэдра. Но ведь мы уже и так **знали**, что для тетраэдра V — E + F = 2, так зачем же это доказывать?

Учитель. Вы правы. Но заметьте, что куб, который представляет контрапример для третьей леммы, не будет контрапримером для основной догадки, так как для куба V — E + F = 2. Вы показали, что аргументация доказательства имеет недостаток, но это не значит, что наша догадка ложна.

Альфа. Так, вы теперь снимете свое доказательство?

Учитель. Нет. Критика не всегда будет необходимо разрушением. Я просто исправлю мое доказательство, чтобы оно устояло против этой критики.

Гамма. Как?

Учитель. Прежде чем показать «как», давайте введем такую терминологию. **Локальным контрапримером** я буду называть пример, который отвергает лемму (не отвергая необходимо основную догадку) , а **глобальным контрапримером** я назову пример, отвергающий саму догадку. Таким образом, ваш контрапример будет локальным, но не глобальным. Локальный, но не глобальный контрапример представляет критику только доказательства, но не догадки.

Гамма. Значит, догадка может быть верной, но ваше доказательство ее не доказывает.

Учитель. Но я легко могу переработать, **улучшить доказательство**, заменив неверную лемму слегка исправленной, которую ваш контрапример не сможет опровергнуть. Я не буду спорить, что при **вынимании любого треугольника получаются только две упомянутые возможности, но скажу только, что на каждой стадии процесса вынимания одного из граничных треугольников может встретиться одна из упомянутых возможностей**. Возвращаясь к моему мысленному эксперименту, я должен только в описании моего третьего шага прибавить одно слово, а именно, что «теперь из триангулированной сети мы отнимаем один за другим **граничные** треугольники». Вы согласитесь, что для приведения в порядок доказательства понадобилось только небольшое замечание?[18]

Гамма. Не думаю, чтобы ваше замечание было таким пустяковым; оно, конечно, очень остроумно. Чтобы выяснить это, я покажу, что оно неверно. Возьмем опять плоскую сеть для куба и отнимем восемь из десяти треугольников в последовательности, указанной на рис. 4. При вынимании восьмого треугольника, который, конечно, будет тогда граничным, мы отняли два ребра и ни одной вершины, а это изменит V — E + F на 1. И мы остались с двумя отдельными треугольниками 9 и 10.

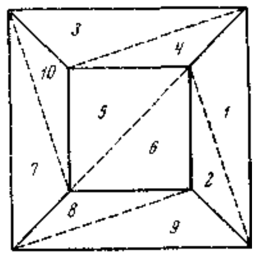


Рис. 4

Учитель. Ну, я мог бы спасти лицо, сказав, что под граничным треугольником я подразумевал такой, вынимание которого не нарушает связности сети. Но интеллектуальная честность препятствует мне скрыто изменять мои положения словами, начинающимися с «я думал»; поэтому я считаю, что вторую версию операции вынимания треугольников я должен **заменить** третьей, а именно, что вынимаются треугольники один за другим таким образом, чтобы V — E + F не изменялось.

Каппа. Охотно соглашусь, что соответствующая такой операции лемма будет истинной: конечно, если мы вынимаем треугольники один за другим, так, чтобы V — E + F не изменялось, то V — E + F не будет изменяться.

Учитель. Нет. Лемма заключается в том, что **треугольники в нашей сети могут быть перенумерованы так, что при вынимании их в правильной последовательности V — E +F не будет изменяться, пока мы не достигнем последнего треугольника.**

Каппа. Но как же построить эту правильную последовательность, если она вообще существует?[19] Ваш первоначальный мысленный эксперимент давал инструкцию: вынимайте треугольники в любом порядке. А теперь вы говорите, что мы должны следовать некоторому определенному порядку, но не говорите, какой это порядок и существует ли он в действительности. Таким образом, ваш мысленный эксперимент разваливается. Вы исправили анализ доказательства, т. е. список лемм, но мысленный эксперимент, который вы назвали «доказательством», исчез.

Ро. Исчез только третий шаг.

Каппа. Кроме того, **улучшили** ли вы лемму? Ваши первые две версии по крайней мере до их опровержения казались тривиально простыми, а ваша длинноватая заплатанная версия даже не кажется очевидной. Можете ли вы верить,

---

[18] Люилье (Lhuilier), исправляя подобным образом доказательство Эйлера, сказал, что он делает только «небольшое замечание» (1812—1813, стр. 179). Однако сам Эйлер, заметив неувязку, от казался от доказательства, а этого «небольшого замечания» не сделал.

[19] Коши думал, что для нахождения на каждой стадии треугольника, который может быть вынут с устранением или двух ребер с вершиной, или лишь одного ребра, можно дать очень простую инструкцию для любого многогранника (1811, стр. 79). Это, конечно, связано с неспособностью вообразить многогранник, который не был бы гомеоморфным со сферой.

что она избежит опровержения?

Учитель. «Очевидные» или даже «тривиально простые» предложения обычно скоро отвергаются: софистические, неочевидные предположения, созревшие после критицизма, могут оказаться истинными.

Омега. А что случится, если и ваши «софистические предположения» окажутся ложными и мы не сможем заменить их неложными? Или если вам не удастся улучшить локальными заплатами ваши аргументы? При помощи замены отвергнутой леммы вам удалось справиться с локальным контрапримером, не бывшим глобальным. А что если в следующий раз вам это не удастся?

Учитель. Вопрос хорош — поставим его завтра в повестку дня.

4. Критика догадки при помощи глобальных контрапримеров

Альфа. У меня есть контрапример, который опровергнет вашу первую лемму; кроме того, он будет контрапримером и для основного положения; это значит, что он вполне может быть и глобальным контрапримером.

Учитель. Вот как! Интересно. Посмотрим.

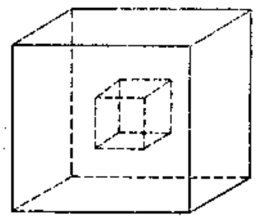


Рис. 5

Альфа. Вообразите твердое тело, заключающееся между двумя всаженными друг в друга кубами, т.е. парой кубов, из которых один находится внутри другого, но не касается его (рис. 5). Этот полый куб делает неверной вашу первую лемму, так как после отнятия грани у внутреннего куба многогранник уже нельзя будет растянуть на плоскости. Не поможет отнятие грани и от внешнего куба. Кроме того, для каждого куба V — E + F = 2, так что для полого куба F — E + F = 4.

Учитель. Очень хорошо. Назовем его **контрапримером** номер 1[20]. Ну и что же?

а) Отбрасывание догадки. Метод сдачи

[20] Этот контрапример 1 был впервые замечен Люилье (1812— 1813, стр. 194). Но издатель Жергонн (Gergonne) добавил (стр. 180), что он и сам заметил это задолго до статьи Люилье. Этого не сделал Коши, опубликовавший свое доказательство за год до этого. Этот контрапример был через двадцать лет снова открыт Гесселем (Hessel, 1832, стр. 16). И Люилье и Гессель пришли к своему открытию, рассматривая минералогическую коллекцию, в которой они заметили несколько двойных кристаллов, где внутренний кристалл был непрозрачным, а внешний пропускал свет. Люилье признал, что стимул к своему открытию он получил от коллекции кристаллов своего друга профессора Пикте (1812—1813, стр. 188), Гессель упоминает о кубах сернистого свинца, заключенных в прозрачных кристаллах полевого шпата (1834, стр. 16).

Гамма. Сэр, ваше спокойствие удивляет меня. Один контрпример отвергает догадку так же эффективно, как и десять. Ваша догадка и ее доказательство полностью взорваны. Руки вверх! Вам нужно сдаться. Сотрите ложное предположение, забудьте о нем и попробуйте найти радикально новый подход.

Учитель. Согласен с вами, что контрпример Альфы — серьезная критика этого **предположения**. Но нельзя сказать, что **доказательство** «полностью взорвано». Если в настоящее время вы согласитесь с моим прежним предложением — употреблять слово «доказательство» в смысле «мысленного эксперимента, приводящего к разложению первоначального предположения на ряд вспомогательных предположений», и не пользоваться им в смысле «гарантии некоторой истины», то вам нет надобности приходить к такому заключению. Мое доказательство действительно доказало предложение Эйлера в первом смысле, но не обязательно во втором. Вы интересуетесь только такими доказательствами, которые «доказывают» то, для доказательства чего они созданы. Я же интересуюсь доказательствами, даже если они не выполняют их первоначального назначения. Колумб не достиг Индии, но он открыл нечто очень интересное.

Альфа. Следовательно, по вашей философии — локальный контрпример (если он не является одновременно глобальным) является критикой доказательства, но не предположения, а глобальный контрпример будет критикой предположения, но не обязательно доказательства. Вы соглашаетесь сдаться в том, что касается предположения, но вы защищаете доказательство. Но если предположение ложно, то что же тогда доказывает доказательство?

Гамма. Ваша аналогия с Колумбом не подходит. Принятие глобального контрпримера равносильно полной сдаче.

б) Отбрасывание контрпримера. Метод устранения монстров

Дельта. Но зачем же принимать контрпример? Вы доказали вашу догадку — теперь она стала теоремой. Я принимаю, что она не согласна с этим так называемым контрпримером. Кто-то из них должен уйти. Но почему же должна уходить теорема, если она была доказана? Нужно отступить «критике». Это поддельная критика. Пара всаженных кубов совсем не будет многогранником. Это монстр, патологический случай, а не контрпример.

Гамма. А почему нет? Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из многоугольников — граней. А мой контрпример является телом, ограниченным многоугольниками — гранями.

Учитель. Назовем это **Определение 1** [21].

Дельта. Ваше определение неправильно. Многогранник должен быть поверхностью: он имеет грани, ребра, вершины, он может быть деформирован, растянут на доске и ему нет никакого дела до понятия о «твердом теле». Многогранник есть поверхность, состоящая из системы многоугольников.

Учитель. Назовем это **Определение 2**[22].

---

[21] Определение 1 встречается впервые в XVIII столетии, например, «Название **многогранного** тела или просто **многогранника** дают любому телу, ограниченному плоскостями или плоскими гранями» (Лежандр, 1794, стр. 160). Подобное же определение дано Эйлером (1750). Евклид, определяя куб, октаэдр, пирамиду, призму, не дает определения общего термина «многогранник», но иногда пользуется им (например, книга XII, вторая задача, предложение 17).

[22] Определение 2 мы находим неявно в одной из работ Жонкьера, прочитанных во французской Академии против тех, кто хотел отвергнуть теорему Эйлера. Эти работы представляют целое сокровище техники удаления монстров. Он мечет громы против чудовищной пары всаженных кубов Люильe: «Эта система представляет не многогранник, но пару многогранников, каждый из которых не связан с другим... Многогранник, по крайней мере с классической точки зрения,

Дельта. Таким образом, в действительности вы показали нам **два** многогранника, **две** поверхности, одна полностью внутри другой. Женщина с ребенком во чреве не может быть контрапримером для тезиса, что люди имеют одну голову.

Альфа. Так! Мой контрапример породил новое понятие о многограннике. Вы осмеливаетесь утверждать, что под многогранником **всегда** подразумеваете поверхность?

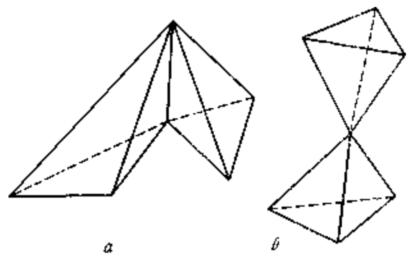


Рис. 6

Учитель. В данный момент позволим себе принять определение 2 Дельты. Можете вы опровергнуть наше предположение, если под многогранником мы теперь будем понимать поверхность?

Альфа. Конечно. Возьмите два тетраэдра, имеющие общее ребро (рис. 6, а). Или возьмите два тетраэдра, имеющие общую вершину (рис. 6, б). Оба эти близнеца связаны, оба составляют одну единственную поверхность. И вы можете проверить, что в обоих случаях V — E + F = 3.

Учитель. **Контрапримеры** 2, а и 2, б [23] .

Дельта. *Я восхищаюсь вашим извращенным воображением, но, конечно, я не считал, что* **любая** система многоугольников будет многогранником. Под многогранником я подразумеваю **системy многоугольников, расположенных таким образом, чтобы (1) на каждом ребре встречались только два многоугольника и (2) чтобы было возможно изнутри одного многоугольника пройти во внутрь другого любой дорогой, которая никогда не пересекает ребра в вершине**. Ваши первые близнецы исключаются первым критерием моего определения, ваши вторые близнецы — вторым критерием.

Учитель. **Определение 3**[24].

Альфа. *Я восхищаюсь вашим извращенным остроумием, изобретающим одно определение за другим, как баррикады против уничтожения ваших любимых идей.* Почему бы вам не определить многогранник как систему многоугольников, для которых имеет место уравнение V — E + F = 2, и это Идеальное Определение...

Учитель. **Определение И**[25].

заслуживает это имя прежде всего только тогда, когда точка может непрерывно двигаться по всей его поверхности; в данном случае это не так... Это первое исключение Люилье может быть поэтому устранено» (1890b, стр. 170). Это определение, противопоставленное Определению 1, хорошо подойдет аналитическим топологам, которые совершенно не интересуются многогранниками как таковыми, по только их поверхностями, как горничная во время уборки.

23 Контрапримеры 2, а и 2, b не были замечены Люилье и впервые открыты только Гесселем (1832, стр. 13).

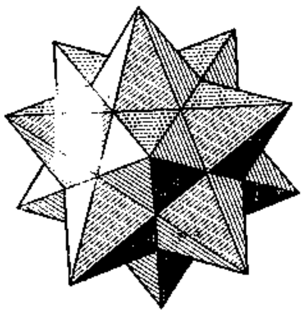
24 Определение 3 для устранения наших близнецов-тетраэдров впервые встречается у Мебиуса (1865, стр. 32). Это путаное определение воспроизводится в некоторых новейших учебниках обычным авторитарным путем: «бери без разговоров»; история этого принципа, устраняющего монстры, которая по крайней мере уяснила бы его смысл, еще не рассказана [см. Гильберт (Hilbert) Кон-Фоссен (Cohn-Vossen, 1956), стр. 200].

25 Определение И, согласно которому эйлеровость была бы определяющей характеристикой многогранника, в действительности было предложено Балцером: «Обычные многогранники иногда (по Гесселю) называются эйлеровыми многогранниками. Было бы лучше найти специальное

Альфа. ... навсегда покончит с диспутом? Тогда уже не будет нужды в дальнейшем исследовании этого предмета.

Дельта. Но не существует на свете теоремы, которую нельзя было бы опровергнуть при помощи монстров.

Учитель. Извините, что прерву вас. Мы видели, что опровержение при помощи контрапримеров зависит от понимания рассматриваемых терминов. Если контрапример должен служить объективной критике, то нужно уговориться в понимании нашего термина. **Мы можем** достичь этого соглашения, определив термин, на котором оборвалось сообщение. Я, например, не определял понятия «многогранник». Я считал, что этот термин является **общеизвестным**, т. е. все заинтересованные обладают способностью отличить вещь, которая является многогранником, от вещи, которая им не является, - то, что некоторые логики называют знанием объема понятия «многогранник». Оказалось, что объем этого понятия совсем не является очевидным: **очень часто определения даются и обсуждаются именно тогда, когда появляются контрапримеры**.



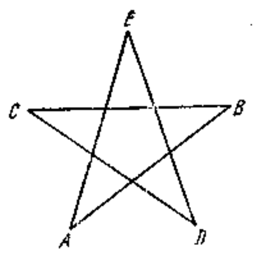


Рис. 8

Рис. 7

Я предлагаю теперь рассмотреть все соперничающие определения вместе и отложить пока обсуждение различий, получающихся в результате выборов разных определений. Может ли кто предложить что-нибудь такое, что можно считать действительно противоречащим примером даже по самому ограничивающему определению?

Каппа. Включая Определение И?

Учитель. Исключая Определение И.

Гамма. Я могу. **Взгляните на этот контрапример 3**: звездчатый многогранник — я назову его «морским ежом» (рис. 7). Он состоит из 12 звездных пятиугольников (рис. 8). Он имеет 12 вершин, 30 ребер и 12 пятиугольных граней — если хотите, вы можете проверить это подсчетом. Таким образом, положение Декарта-Эйлера совершенно неправильно, так как для этого многогранника V — E + F = —6 [26].

название для ненастоящих (uneigen-tliche) многогранников» (1860, т. II, стр. 207). Упоминание о Гесселе неправильно: Гессель использовал термин «эйлеров» просто как сокращенное название многогранников, для которых соотношение Эйлера справедливо в противоположность неэйлеровым (1832, стр. 29). Относительно Определения И см. также цитату из Шлефли в следующем примечании.

[26] «Морской еж» был впервые разобран Кеплером в его космологической теории (1619, кн. II, 19 и 26 и кн. V, гл. 1, 3, 9, 47). Название «морского ежа» принадлежит Кеплеру (cui nomen Echino feci). Рис. 7 скопирован с его книги (стр. 52), которая содержит еще и другую картинку на стр. 182. Пуансо независимо открыл его второй раз; именно он указал, что формула Эйлера не приложима к нему (1809, стр. 48). Стандартный термин нашего времени «малый звездчатый многогранник» принадлежит Кэйли (1859, стр. 125). Шлефли вообще допускал звездчатые многогранники, но тем не менее отбросил наш малый звездчатый многогранник как монстр. По его мнению,— «это не будет настоящим многогранником, так как он не удовлетворяет условию V — E + F = 2» (1852, § 34).

Дельта. А почему вы думаете, что ваш «морской еж» будет многогранником?

Гамма. Разве вы не видите? Это многогранник, гранями которого являются двенадцать звездчатых пятиугольников. Он удовлетворяет вашему последнему определению: это — «система многоугольников, расположенных таким образом, что (1) на каждом ребре встречаются только два многоугольника и (2) из каждого многоугольника можно попасть в любой другой многоугольник без перехода через вершину многогранника».

Дельта. Но тогда вы даже не знаете, что такое многоугольник! Звездчатый пятиугольник наверняка не будет многоугольником. **Многоугольником называется система ребер, расположенных таким образом, что (1) в каждой вершине встречаются только два ребра и (2) ребра не имеют общих точек, кроме вершин.**

Учитель. Назовем это **Определение 4**.

Гамма. Я не понимаю, почему вы включаете второе условие: 'Правильное определение многоугольника должно содержать только первое условие.

Учитель. **Определение 4'**.

Гамма. Второе условие не имеет ничего общего с сущностью многоугольника. Смотрите: если я немножко подыму одно ребро, то звездчатый многоугольник все же будет многоугольником, даже в вашем смысле. Вы воображаете многоугольник, начерченный мелом на доске; но его должно представлять себе как структуру из дерева: тогда то, что вы считаете общей точкой, в действительности будет, очевидно, не точкой, но двумя различными точками, лежащими одна над другой. Вас ввело в заблуждение, что вы помещаете многоугольники в плоскость,— вы должны позволить его членам простираться в пространстве [27].

Дельта. Не скажете ли вы мне, что такое площадь звездчатого многоугольника? Или вы думаете, что некоторые многоугольники не имеют площади?

Гамма. Да ведь вы же сами сказали, что понятие о многограннике может быть совсем не связано с идеей телесности. Почему же теперь вы полагаете, что понятие о многоугольнике должно быть связано с понятием о площади? Мы согласились, что многогранник представляет собой замкнутую поверхность с ребрами и вершинами — тогда почему бы нам не согласиться, что многоугольник будет просто замкнутой кривой с вершинами? Но если вы придерживаетесь нашей идеи, то я охотно

---

[27] Диспут о том, надо ли определять многоугольник так, чтобы включить и звездчатые многоугольники (Определение 4 или Определение 4'), является очень старым. Выставленный в нашем диалоге аргумент — что звездчатые многоугольники могут существовать как обыкновенные многоугольники в пространстве высших измерений — является новейшим топологическим аргументом, но можно выдвинуть и много других. Так, Пуансо, защищая свои звездчатые многогранники, в пользу допущения звездчатых многоугольников приводил аргументы, заимствованные из аналитической геометрии: «все эти различия (между обыкновенными и звездчатыми многоугольниками) являются более кажущимися, чем действительными, и полностью исчезают в аналитическом изложении, где эти различные виды многоугольников совершенно неразделимы. Ребру правильного многоугольника соответствует уравнение с действительными корнями, одновременно дающее ребра всех правильных многоугольников того же порядка. Таким образом, нельзя получить ребра правильного вписанного семиугольника, не найдя в то же время семиугольников второго и третьего рода. Обратно, если дана сторона правильного семиугольника, то можно определить радиус круга, в который он может быть вписан, но, делая это, мы найдем три различных круга, соответствующих трем родам семиугольника, который может быть построен на данной стороне; аналогично и для других многоугольников. Таким образом, мы имеем право дать название многоугольника этим новым звездчатым фигурам» (1809, стр. 26).

Шредер пользуется аргументом Ганкеля: «В алгебре было весьма плодотворным распространение на рациональные дроби понятия о степени, первоначально связанного только с целыми числами; это подсказывает нам сделать такую же попытку и в геометрии, когда представится возможность...» (1862, стр. 56). Затем он показывает, что геометрическую интерпретацию многоугольников с числом сторон p/q можно найти в виде звездчатых многоугольников.

определю площадь звездчатого многоугольника[28].

Учитель. Оставим на некоторое время этот диспут и пойдем, как и раньше. Рассмотрим вместе два последних определения — **Определение 4** и **Определение 4'**. Может ли кто-нибудь дать контрпример для нашего предположения, которое допускало бы **оба** определения многоугольников?

Альфа. Вот вам один. Рассмотрим **раму картины** вроде такой (рис. 9). По всем предложенным до сих пор определениям это будет многогранник. Однако после подсчета вершин, ребер и граней вы найдете, что V — E + F = 0.

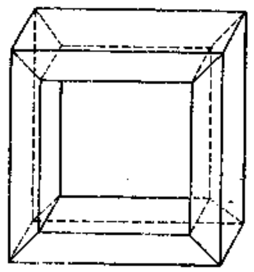


Рис. 9

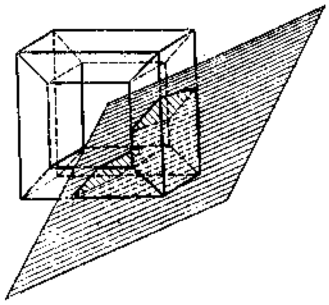


Рис. 10

Учитель. **Контрпример 4** [29].

Бета. Ну, это конец нашей догадке. Очень жаль, потому что она во многих случаях была подходящей. Но, по-видимому, мы напрасно потеряли время.

Альфа. Дельта, я поражен. Вы ничего не говорите? Вы не можете этот новый контрпример **выопределить** из существования? Я думал, что на свете не существует гипотез, которых вы не смогли бы спасти от уничтожения при помощи подходящей лингвистической хитрости. Сдаетесь вы теперь? Наконец, соглашаетесь, что существуют неэйлеровы многогранники? Не поверю!

Дельта. Нашли бы вы лучше более подходящее имя для ваших неэйлеровых чудовищ и не путали нас, называя их многогранниками. Но я постепенно теряю интерес к вашим монстрам. Меня берет отвращение от ваших несчастных «многогранников», для которых неверна прекрасная теорема Эйлера[30]. Я ищу порядка и гармонии в математике, а вы только распространяете анархию и хаос[31].

---

[28] Заявление Гаммы, что он может определить площадь звездчатых многоугольников, не блеф. Некоторые из защитников более широкого понятия о многоугольниках решили эту задачу, выставив более широкое определение площади многоугольника. Это, в частности, можно сделать очевидным в случае правильных звездчатых многоугольников. Мы можем взять площадь многоугольника как сумму площадей равнобедренных треугольников, которые соединяют центр вписанного или описанного круга со сторонами многоугольника. В этом случае, конечно, некоторые «части» звездчатого многоугольника будут считаться не один раз. В случае неправильных многоугольников, где у нас нет никакой выделяющейся точки, мы можем в качестве начала взять любую точку и рассматривать отрицательно ориентированные треугольники как отрицательные площади (Мейстер, 1769—1770, стр. 179). Оказывается — и этого наверняка можно было ждать от «площади» — что определенная так площадь не будет зависеть от выбора начала (Мебиус, 1827, стр. 218). Конечно, можно спорить с теми, кто не считает оправданным понятия «площади» как числа, полученного в результате такого подсчета; однако защитники определения Мейстера — Мебиуса называют его «правильным определением», которое «одно только научно оправдано» [замечания Р. Гаусснера (Haussner, 1906, стр. 114—115)]. Искание сущности было характерной чертой в спорах об определениях.

[29] Контрпример 4 мы найдем и в классическом труде Люилье (1812—1813) на стр. 185. Жергопн добавил, что он тоже знал его. Но Грунерт не знал его четырнадцатью годами позже (1827), а Пуансо — сорока пятью годами (1858, стр. 67).

[30] Это парафраз из письма Эрмита к Стильтьесу: «Я с дрожью ужаса отворачиваюсь от ваших несчастных проклятых функций, у которых нет производных» (1893).

[31] «Исследования, производимые над... функциями, нарушающими законы, на универсальность которых возлагались надежды, рассматривались почти как распространение анархии и хаоса там,

Наши положения непримиримы.

Альфа. Вы настоящий старомодный консерватор! Вы браните скверных анархистов, портящих ваш «порядок» и «гармонию» и вы «решаете» затруднения словесными рекомендациями.

Учитель. Послушаем последнее спасительное определение.

Альфа. Вы подразумеваете последний лингвистический трюк, последнее сжатие понятия «многогранник»? Дельта разрушает реальные задачи, вместо того чтобы разрешать их.

Дельта. Я не «сжимаю» понятий. Это вы **расширяете** их. Например, эта картинная рама совсем не настоящий многогранник.

Альфа. Почему?

Дельта. Возьмите какую-нибудь точку в «туннеле» — пространстве, ограниченном рамой. Проведите плоскость через эту точку. Вы найдете, что всякая такая плоскость будет всегда с картинной рамой иметь **два** поперечных сечения, составляющих два отдельных, совершенно не связанных многоугольника! (рис. 10).

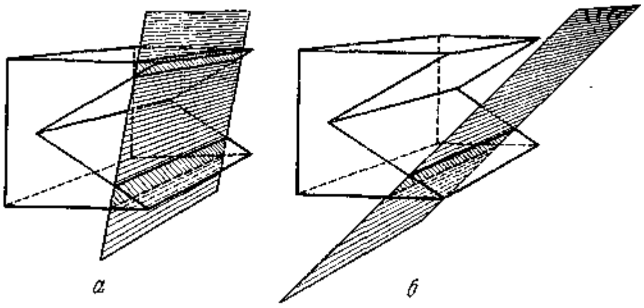


Рис. 11

Альфа. Ну и что?

Дельта. **В случае настоящего многогранника через любую точку пространства можно провести по крайней мере одну плоскость, сечение которой с многогранником будет состоять из одного лишь многоугольника.** В случае выпуклого многогранника этому требованию будут удовлетворять все плоскости, где бы мы ни взяли точку. В случае **обыкновенного** невыпуклого многогранника некоторые плоскости будут иметь большее число пересечений, но всегда будут такие, которые имеют только одно пересечение (рис 11,а и 11,6). В случае этой картинной рамы все плоскости будут иметь два поперечных сечения, если мы возьмем точку внутри рамы. Как же тогда вы можете назвать это многогранником?

Учитель. Это похоже на еще одно определение, выраженное на этот раз в неявной форме. Назовем его **Определение 5** [32].

где прошедшие поколения искали порядка и гармонии» (Сакс, 1933, Предисловие). Сакс говорит здесь о жарких битвах устранителей монстров (вроде Эрмита) с опровергателями, характерных для последних десятилетий XIX в. (и, конечно, начала XX в.) в развитии современной теории функций действительного переменного, «ветви математики, которая имеет дело с контрапримерами» [Мунро (Munroe, 1953, Предисловие)]. Бушевавшая несколько позже между противниками и защитниками математической логики такая же ярая битва была ее непосредственным продолжением. См. также подстрочные примечания 34 и 35.

[32] Определение 5 было выставлено неутомимым устранителем монстров Жонкьером, чтобы убрать с дороги многогранник Люилье с туннелем (картинная рама): «И этот многогранный комплекс не будет настоящим многогранником в обычном смысле этого слова; действительно, если провести какую-нибудь плоскость через любую точку внутри одного из туннелей, проходящих через тело, то получающееся поперечное сечение составится из двух различных многоугольников, совершенно не связанных друг с другом; в обычном многограннике это может иметь место для некоторых

Альфа. Целая серия контрапримеров, подходящая серия определений, которые не содержат ничего нового, но представляют лишь новые откровения богатства одного старого понятия, которое кажется имеющим столько же «скрытых» требований, сколько и контрапримеров. **Для всех многогранников** V-E+F=2 кажется неопровержимой, старой и «вечной» истиной. Странно думать, что когда-то это было удивительной догадкой, исполненной вызова и волнения. Теперь же, вследствие ваших странных изменений смысла, оно превратилось в скудную условность, в вызывающую пренебрежение частицу догмы. (Он покидает классную комнату.)

Дельта. Я не могу понять, каким образом такой способный человек, как Альфа, может тратить свой талант на пустые словопрения. Он, кажется, весь поглощен производством монстров, но монстры никогда не способствовали росту ни в мире природы, ни в мире мысли. Эволюция всегда следует гармоническому и упорядоченному образцу.

Гамма. Генетики могут легко опровергнуть это. Разве вы не слышали, что мутации, производящие уродства, играют значительную роль в макроэволюции? Такие уродливые мутанты они называют «подающими надежды монстрами». Мне кажется, что контрапримеры Альфы, хотя и уродства, являются «уродами, подающими надежду»[33]

Дельта. Во всяком случае Альфа отказался от борьбы. Теперь никаких новых монстров больше уже не будет.

Гамма. У меня есть новый. Удовлетворяет всем ограничениям **Определений 1, 2, 3, 4 и 5**, но для него V—E+F=1. Этот **контрапример 5** — простой цилиндр. У него 3 грани (оба основания и боковая поверхность), 2 ребра (оба круга) и нет вершин. Он многогранник по вашему определению: (1) у каждого ребра ровно по два многоугольника и (2) изнутри одного многоугольника можно пройти внутрь любого другого путем, не пересекающим ни одного ребра в вершине. И вам придется грани считать настоящими многоугольниками, так как они удовлетворяют вашим требованиям: (1) у каждой вершины встречаются только два ребра и (2) ребра не имеют общих точек, кроме вершин.

Дельта. Альфа растягивал понятия, а вы их режете. Ваши «ребра» — не ребра! Ребро имеет две вершины!

Учитель. **Определение 6 ?**

Гамма. Но почему отрицать статус «ребра» для таких ребер, которые имеют только одну или нуль вершин? Вы обычно сокращали содержание понятий, а теперь так калечите их, что почти ничего не остается!

Дельта. Но разве вы не видите всей тщетности так называемых опровержений? До сих пор, когда изобретали новый многогранник, то это делалось для какой-нибудь практической цели; теперь же их изобретают специально для того, чтобы сделать ошибочными рассуждения наших отцов, и ничего другого из них и не получишь. Наш предмет превращается в тератологический музей, где приличные нормальные многогранники могут быть счастливыми, если им удается удержать очень маленький уголок[34]

положений секущей плоскости, а именно в случае некоторых невыпуклых многогранников, но не для всех таких» (1890b, стр. 170— 171). Можно задаться вопросом, заметил ли Жонкьер, что его Определение 5 исключает также некоторые невыпуклые сфероидальные многогранники.

[33] «Мы не должны забывать, что кажущееся сегодня уродством завтра может быть началом линии специального приспособления... Я подчеркнул важность редких, но крайне богатых следствием мутаций, влияющих на ход решающих эмбриональных процессов, которые могут положить начало тому, что можно назвать подающими надежды уродами, уродами, которые начнут новую эволюционную линию, если приспособятся к какой-нибудь незанятой окруженческой нише» (Гольдшмидт, 1933, стр. 544 и 547). Мое внимание было привлечено к этой работе Поппером.

[34] Парафраз из Пуанкаре (1908, стр. 131—132). Полный оригинальный текст таков: «Логика иногда делает чудовища. Вот уже с половины века мы наблюдаем, как появляется толпа странных функций, которые, по-видимому, пытаются возможно меньше походить на честные функции,

Гамма. Я думаю, что если мы хотим изучить что-нибудь действительно глубоко, то нам нужно исследовать это не в его «нормальном», правильном, обычном виде, но в его критическом положении, в лихорадке и страсти. Если вы хотите узнать нормальное здоровое тело, то изучайте его, когда оно в ненормальном положении, когда оно болеет. Если вы хотите знать функции, то изучайте их странности. Если вы хотите познать обычные многогранники, то изучайте их причудливые обрамления. Вот только так можно внести математический анализ в самое сердце вещей[35]. Но если даже в основе вы правы, разве вы не видите бесплодия вашего метода ad hoc? Если вы хотите провести пограничную линию между контрапримерами и монстрами, то этого нельзя сделать в припадках и срывах.

Учитель. Я думаю, что мы должны отказаться от принятия стратегии Дельты в работе с глобальными контрапримерами, хотя нужно поздравить его с искусным ее проведением. Его метод мы можем назвать подходящим термином — **метод устранения монстров**. При помощи такого метода можно исключить любой контрапример для первоначального предположения при помощи какого-нибудь глубокого, но всегда ad hoc, изменения определения многогранника, или терминов, его определяющих, или определяющих терминов для его определяющих терминов. Мы должны несколько с большим уважением обращаться с контрапримерами, а не упорно заклинать их, называя монстрами. Главной ошибкой Дельты, пожалуй, будет его догматический уклон в понимании математического доказательства; он думает, что доказательство необходимо доказывает то, для доказательства чего оно было предназначено. Мое понимание доказательства допускает «доказательство» и **ложного** предположения путем разложения его на вспомогательные. Если предположение ложно, то я с уверенностью ожидаю, что будет ложным и, по крайней мере, одно из этих вспомогательных предположений. Но само разложение тоже может быть интересным! Я не смущаюсь, если будет найден контрапример для «доказанной» догадки; я даже согласен пытаться «доказывать» ложное предположение!

Тета. Я не понимаю вас.

Каппа. Он только следует Новому Завету: «Испытывай все; держись крепко за то, что хорошо» (Первое послание к фессалоникийцам, гл. 5, 21).

в) Улучшение догадки методами устранения исключений. Частичные исключения. Стратегическое отступление или безопасная игра

Бета. Я полагаю, сэр, что вы намереваетесь объяснить ваши несколько парадоксальные замечания. Принося вам всяческие извинения за мою нетерпеливость, я все же должен избавиться от их тяжести.

Учитель. Продолжайте.

служащие какой-нибудь цели. Нет уже больше непрерывности, а если иногда и бывает, то без производных, и т. д. Даже больше, со строго логической точки зрения, именно эти странные функции и являются наиболее общими, а те, с которыми встречаешься без особых поисков, уже являются только как частные случаи. Для них остается только самый маленький уголок.

До сих пор, когда изобретали новую функцию, это было для какой-нибудь практической цели; сегодня их изобретают специально для того, чтобы сделать ошибочными рассуждения наших отцов, и ничего другого получить из них нельзя.

Если бы логика была единственным руководителем учителя, то стало бы необходимым начинать с наиболее общих функций, т. е. с наиболее странных. Именно начинающему пришлось бы разбираться в этом тератологическом музее». Пуанкаре обсуждает эту задачу в связи с положением в теории действительных функций, но это неважно.

[35] Парафраз из Данжуа (Denjoy, 1919, стр. 21).

(Альфа возвращается.)

Бета. Хотя некоторые положения из аргументов Дельты не кажутся мне умными, но я все-таки прихожу к убеждению, что в них есть разумное зерно. Теперь, мне кажется, что ни одно из предположений не является правильным вообще, но только в некоторой ограниченной области, которая не содержит исключений. Я против того, чтобы называть эти исключения «монстрами», или «патологическими случаями». По существу это равносильно методологическому требованию не рассматривать их как **примеры** интересные, имеющие право на самостоятельное существование и заслуживающие специального исследования. Но я также против термина «**контрапример**»; хотя это и дает право принимать их на равной ноге с подтверждающими примерами, но как-то окрашивает их в военные цвета, так что некоторые, вроде Гаммы, при их виде приходят в панику и впадают в соблазн совсем отказаться от прекрасных и остроумных доказательств. Нет, **они являются только исключениями**.

Сигма. Я более чем согласен. Термин «контрапример» имеет агрессивный оттенок и оскорбляет тех, кто нашел доказательство. «Исключение» — это как раз правильное выражение. «Существуют три рода математических предложений:

1. Те, которые являются всегда справедливыми и для которых нет пи ограничений, ни исключений, например, сумма углов всех плоских треугольников всегда равна двум прямым.

2. Те, которые основаны на некотором ложном принципе и, следовательно, никак не могут быть допущены.

3. Те, которые зависят от правильных принципов, но тем не менее в некоторых случаях допускают ограничения или исключения...»

Эпсилон. Что?

Сигма . «... Не должно смешивать ложные теоремы с теоремами, допускающими некоторые ограничения»[36], Как говорит пословица: **исключения подтверждают правило**.

Эпсилон (к Каппе). Кто этот путаник? Ему следовало бы немного поучиться логике.

Каппа (к Эпсилону). И узнать кое-что об неевклидовых плоских треугольниках.

Дельта. Хотя мне и трудно, но я должен предсказать, что в этой дискуссии, вероятно, я и Альфа окажемся на одной стороне. Мы оба аргументировали, исходя из той основы, что предложение может быть или ложным или правильным, и расходились лишь в том, будет ли, в частности, правильной или ложной эйлерова теорема. Но Сигма хочет, чтобы мы допустили третью категорию предложений, которые «в принципе» верны, но «в некоторых случаях допускают исключения». Согласиться с мирным сосуществованием теорем и исключений, значит допустить в математике хаос и смуту.

Альфа. Согласен.

Эта. Я не хотел мешать блестящей аргументации Дельты, но теперь я думаю, что, может быть, будет полезно, если я кратко расскажу историю **моего** интеллектуального развития. В мои школьные годы я сделался, как вы сказали бы, устранителем монстров не для защиты против людей типа Альфы, но для защиты против типа Сигмы. Я припоминаю прочитанное в журнале относительно теоремы Эйлера: «Блестящие математики предложили доказательства всеобщей правильности этой теоремы. Однако она допускает исключения... Необходимо обратить внимание на эти исключения, так как даже новейшие авторы не всегда ясно признают их»[37]. Эта статья не была изолированным дипломатическим

---

[36] Берар (Berard, 1818-1819, стр. 347 и 349).

[37] Гессель (Hessel, 1832, стр. 13). Гессель снова открыл в 1832 г. «исключения» Люилье. Работу Люилье (1812—1813) он прочел как раз после отправки своей рукописи. Однако он решил не требовать назад своей работы, хотя большая часть ее результатов уже оказалась опубликованной

упражнением. «Хотя в учебниках и лекциях по геометрии всегда указывается, что прекрасная теорема Эйлера V+F=E+2 в некоторых случаях имеет «ограничения», или «не кажется правильной», но еще никто не узнал истинной причины этих исключений» [38]. Я очень внимательно рассмотрел эти «исключения» и пришел к выводу, что они не соответствуют правильному определению рассматриваемых предметов. Таким образом, можно восстановить в правах доказательство теоремы; тогда хаотическое сосуществование теорем и исключений исчезнет.

Альфа. Хаотическая позиция Сигмы может служить объяснением вашего устранения монстров, но никак не извинением, не говоря уже об оправдании. Почему не исключить хаос принятием верительных грамот контрапримера и отбросить и «теорему» и «доказательство»?

Эта. А почему я должен отбрасывать доказательство? Я не могу видеть в нем ничего неправильного. А вы можете? Мое устранение монстров мне кажется более рациональным, чем ваше устранение доказательств.

Учитель. Наши дебаты показали, что устранение монстров может получить более симпатизирующую аудиторию, если оно будет исходить из дилеммы Эты. Но вернемся к Бете и Сигме. Ведь это Бета перекрестил контрапримеры в исключения. Сигма согласился с Бетой...

Бета. Я рад, что Сигма согласился со мной, но боюсь, что я не могу согласиться с ним. Конечно, существуют три типа предложений: правильные, безнадежно неправильные и неправильные, но подающие надежду. Этот последний вид может быть улучшен и возведен в степень правильных при помощи добавления ограничивающих положений, устанавливающих исключения. Я никогда не «приписываю формулам неограниченную область правильности. В действительности большая часть формул справедлива только при выполнении некоторых условий. Определение этих условий и, конечно, уточнение смысла употребляемых терминов заставляют у меня исчезать всякую неопределенность»[39]. Как видите, я не являюсь сторонником любой формы мирного сосуществования между неисправленными формулами и исключениями. Я исправляю мои формулы и делаю их **совершенными**, вроде стоящих в первом классе Сигмы. Это значит, что я принимаю метод устранения монстров, поскольку он может служить для установления **области правильности первоначальной догадки**; но **отбрасываю его**, если он действует как лингвистический трюк для спасения «изящных» теорем при помощи ограничивающих положений. Эти два вида функционирования метода Дельты должны быть строго разделены. Мой метод, для которого характерен только первый способ функционирования, мне хотелось бы назвать «**методом устранения исключений**». Я буду использовать его для точного определения области, в которой является правильной догадка Эйлера.

Учитель. Какую же «точно определенную область» эйлеровых многогранников вы обещаете нам? И какова ваша «совершенная формула»?

Бета. **Для всех многогранников, не имеющих полостей (вроде пары куб в кубе) и туннелей (как рама картины),** V — E + F = 2.

Учитель. Вы уверены?

Бета. Да, вполне.

ранее; он думал, что острие его статьи должно быть направлено против «новейших авторов», игнорирующих эти исключения. Случилось, между прочим, что одним из этих авторов был издатель журнала, в который Гессель послал свою статью, а именно Крелле (A. I. Crelle). В своем курсе (1826—1827) он «доказал», что теорема Эйлера верна для всех многогранников (т. II, стр. 668—671).

[38] Matthiesson (1863, стр. 49). Маттисен говорит здесь об «Lehr-buch der Geometrie» Heis'a и Eschweiler'a и об «Lehrbuch der Ste-reometrie» Grunert'a. Маттисен, однако, решил эту задачу не как Эта, устранением монстров, а их исправлением, как Ро (см. примечание 59).

[39] Это из введения Коши к его знаменитой книге (1821).

Учитель. А как быть с тетраэдрами-близнецами?

Бета. Извините. **Для всех многогранников, которые не имеют полостей, туннелей и «кратной структуры»** [40].

Учитель. Вижу. Я согласен с тем, что вы исправляете догадку, вместо того чтобы просто принять или не принять ее. Я считаю, это лучше и метода устранения монстров, и метода сдачи. Однако у меня есть два возражения. **Во-первых**, я оспариваю вашу уверенность в том, что ваш метод не только улучшает, но даже «совершенствует» догадку, что он делает ее «строго правильной», что он «заставляет исчезнуть все неопределенности», Но ad hoc-ность вашего метода уничтожает его шансы на достижение уверенности в истине.

Бета. В самом деле?

Учитель. Вы должны допустить, что каждая новая версия вашего предположения является лишь придуманным ad hoc средством исключения только что возникшего контрапримера. Когда вы напали на куб в кубе, вы исключили многогранники с **полостями**. Когда вам удалось заметить картинную раму, вы исключили многогранники с **туннелями**. Я ценю ваш открытый и наблюдательный ум; заметить все эти исключения, конечно, очень хорошо, но я думаю, что все же стоило бы внести некоторый метод в ваше слепое отыскивание «исключения». Хорошо, допустим, что положение «все многогранники являются эйлеровыми» является только догадкой. Но зачем же статус теоремы, которая более уже не является догадкой, давать положению, что «все многогранники без полостей, туннелей и еще чего-нибудь являются эйлеровыми»? Как вы можете быть уверенным, что перечислили **все** исключения?

Бета. Можете ли дать одно, которое я не учел бы?

Альфа. А что вы скажете о моем «морском еже»?

Гамма. И о моем цилиндре?

Учитель. Мне даже не нужно какое-нибудь конкретное новое «исключение» для моей аргументации. Мой аргумент касается только **возможности** дальнейших исключений.

Бета. Конечно, вы, может быть, правы. Не нужно сразу менять своей позиции при появлении какого-нибудь нового контрапримера. Не нужно говорить: «Если в явлениях не находится ни одного исключения, то заключение может быть высказано в общем смысле. Но если в дальнейшем появится какое-нибудь исключение, то тогда можно будет начать высказывать его с тем исключением, которое появилось»[41]. Дайте подумать. Сначала мы высказали догадку, что V-E+F = 2 годится для **всех** многогранников, потому что мы нашли его верным для кубов, октаэдров, пирамид и призм. Мы, конечно, не можем принять «этот несчастный путь заключения от частного к общему»[42]. Ничего нет удивительного в том, что исключения появляются; скорее поразительно то, что раньше их не было найдено

---

[40] Люилье и Жергонн были, по-видимому, уверены, что список Люилье содержит все исключения. Во введении к этой части работы мы читаем: «Каждый может легко убедиться, что теорема Эйлера справедлива вообще для всех многогранников, будут ли они выпуклыми, или нет, за исключением специально указанных случаев» [Люилье (1812—1813, стр. 177)]. Затем в примечаниях Жергонна мы опять читаем: «...указанные исключения, по-видимому, являются единственными возможными» (там же, стр. 188). **Но в действительности Люилье пропустил тетраэдров-близнецов, которые впервые были замечены только через -двадцать лет Гесселем (1832).** Стоит отметить, что некоторые ведущие математики, даже математики с живым интересом к методологии, вроде Жергонна, могли верить, что можно полагаться на метод устранения исключений. Эта уверенность аналогична «методу деления» в индуктивной логике, согласно, которому для явлений может быть произведено полное перечисление возможных объяснений, и что вследствие этого метод experimentum crucis, исключающий все объяснения, кроме одного, **доказывает** это последнее.

[41] И. Ньютон (1717, стр. 380).

[42] Абель (1826). Его критика, по-видимому, направлена против эйлерова индуктивизма.

много больше. По-моему, это произошло оттого, что мы главным образом занимались выпуклыми многогранниками. Как только появились другие многогранники, так наше обобщение уже перестало годиться[43].

Так, вместо постепенного отбрасывания исключений я скромно, но с надежностью проведу граничную линию — «**Все выпуклые многогранники являются эйлеровыми**»[44]. И я надеюсь, вы согласитесь, что в этом нет ничего гадательного, это уже будет теоремой.

Гамма. А как с моим цилиндром? Ведь он выпуклый?

Бета. Это шутка!

Учитель. Забудем на момент об этом цилиндре. Некоторые критические замечания можно выставить даже и без цилиндра. В этой новой видоизмененной версии метода устранения исключений, который так бодро выдумал Бета в ответ на мою критику, постепенный отход заменен стратегическим отступлением в область, которая, как думают, для данной догадки будет твердыней. Вы стремитесь к безопасности. Но так ли вы безопасны, как думаете? У вас нет никаких гарантий, что внутри вашей твердыни но найдется никаких исключений. Кроме того, есть и противоположная опасность. Может быть, вы слишком радикально отступили, оставив за стеной большое количество эйлеровых многогранников? Наша первоначальная догадка могла быть чрезмерным утверждением, но ваш «усовершенствованный» тезис, по-моему, очень сильно смахивает на утверждение с недостатком; и все же вы не можете быть уверены, что он также не будет чрезмерным утверждением.

Мне также хотелось бы выставить мое **второе** возражение: вы в своей аргументации забываете о доказательстве; делая предположение относительно области правильности догадки, по-видимому, вы совсем не нуждаетесь в доказательстве. Конечно, вы не думаете, что доказательства являются излишними?

Бета. Этого я никогда не говорил.

Учитель. Да, этого вы не сказали. Но вы открыли, что наше доказательство не доказывает нашей первоначальной догадки. А будет ли оно доказывать вашу

---

[43] Это тоже парафраз из цитированного письма, в котором Абель заботился об устранении исключений из общих «теорем» относительно функций и об установлении таким образом абсолютной строгости. Его оригинальный текст (вместе с предыдущей цитатой) таков: «В высшем анализе очень мало предложений доказано с окончательной строгостью. **Везде встречаешься с этим несчастным путем заключения от частного к общему** и можно удивляться, что этот процесс только очень редко приводит к тому, что называется парадоксом. Конечно, очень интересно посмотреть, в чем тут причина. По моему мнению, причина заключается в том, что **аналитики большей частью занимались функциями, которые могут быть выражены степенными рядами. Как только появляются другие функции, что, конечно, встречается очень редко, движение вперед не происходит**, так как начинают получаться ложные заключения, следует бесчисленное множество ошибок, из которых одна подпирает другую...» (подчеркнуто мной. — Авт.). Пуансо нашел, что в теории многогранников, а также в теории чисел индуктивное обобщение «часто» терпит крушение: «В большей части свойства являются индивидуальными и не подчиняются какому-нибудь общему закону» (1809, § 45). Интригующая характеристика этой осторожности к индукции заключается в том, что отдельные крушения приписываются тому обстоятельству, что вся совокупность (фактов, чисел, многогранников), конечно, содержит удивительные исключения.

[44] Это опять очень близко подходит к методу Абеля. Таким же путем область «подозрительных» теорем о функциях Абель ограничил степенными рядами. В истории догадки Эйлера такое ограничение выпуклыми многогранниками было весьма обычным. Лежандр, например, дав свое общее определение многогранников (ср. подстрочное примечание И), предлагает доказательство, которое, с одной стороны, неприменимо ко всем его многогранникам вообще, а с другой, применимо ко многим невыпуклым. Тем не менее в дополнительном примечании мелким шрифтом (может быть, эта мысль появилась после того, как он натолкнулся па никем ранее не. сформулированное исключение) он скромно, по безопасно отступает к выпуклым многогранникам (1809, стр. 161, 164, 228).

исправленную догадку? Скажите же мне это[45]35.

Бета. Ну...

Эта. Благодарю вас, сэр, за этот аргумент. Смущение Беты ясно обнаруживает превосходство опороченного метода устранения уродств. Ведь мы говорим, что доказательство доказывает то, что было предложено доказать, и наш ответ совершенно недвусмыслен. Мы не позволяем своенравным контрапримерам свободно уничтожать респектабельные доказательства, даже если они переодеваются в скромные «исключения».

Бета. Я ничуть не смущен тем, что мне приходится разработать, исправить и — извините меня, сэр,— **усовершенствовать** мою методологию под стимулом критики. Мой ответ таков. Я отбрасываю первоначальную догадку как ложную, потому что для нее имеются исключения. Также я отбрасываю и доказательство, потому что те же исключения, по крайней мере для одной из лемм, будут тоже исключениями (по вашей терминологии это значит, что глобальный контрапример является необходимо и локальным). Альфа остановился бы на этом месте, так как опровержения, по-видимому, вполне удовлетворяют его интеллектуальным способностям. Но я иду дальше. Подходящим ограничением **сразу** и догадки и доказательства их собственной областью я совершенствую **догадку**, которая теперь становится **истинной**, и совершенствую в своей основе здравое **доказательство**, которое становится теперь **строгим** и, очевидно, уже не будет содержать ложных лемм. Например, мы видели, что не все многогранники после устранения одной грани могут быть растянуты на плоскости в плоскую фигуру. Но это может быть сделано со всеми выпуклыми многогранниками. Поэтому мою усовершенствованную и строго доказанную догадку я имею право назвать **теоремой**. Я снова формулирую ее: «**Все выпуклые многогранники являются эйлеровыми**». Для выпуклых многогранников все леммы будут, очевидно, истинными и доказательство, которое в его ложной всеобщности не было строгим, в ограниченной области выпуклых многогранников станет строгим. Итак, сэр, я ответил на ваш вопрос.

Учитель. Итак, леммы, которые когда-то выглядели очевидно истинными до открытия исключения, будут опять выглядеть очевидно истинными, ...пока не открыто новое исключение. Вы допускаете, что положение: «Все многогранники являются эйлеровыми» было догадкой; вы только что допустили, что «Все многогранники без полостей и туннелей являются эйлеровыми» было тоже догадкой, почему же не допустить, что «Все выпуклые многогранники являются эйлеровыми» может тоже оказаться догадкой!

---

[45] Многих работающих математиков смущает вопрос, чем же являются доказательства, если они не могут доказывать. С одной стороны, они знают из опыта, что доказательства могут быть ошибочными, а с другой,— по своему догматистскому углублению в доктрину они знают, что **подлинные** доказательства должны быть безошибочными. **Математики-прикладники** обычно решают эту дилемму застенчивой, но крепкой верой, что доказательства **чистых математиков** являются «полными» и что они **действительно** доказывают. Чистые математики, однако, знают лучше — они уважают только «полные доказательства», которые даются **логиками**. Если же их спросить, какова же польза или функция их «неполных доказательств», то они большей частью теряются. Например, Харди (С. Н. Hardy) имел большое почтение к требованию логиками формальных доказательств, но когда захотел охарактеризовать математическое доказательство, «как мы работающие математики его знаем», то он сделал это следующим образом: «Строго говоря, такой вещи, как математическое доказательство, не существует; все, что мы можем сделать в конце анализа, это только показать: ...доказательства представляют то, что Литтльвуд и я называем **газом**, риторическими завитушками, предназначенными для воздействия па психологию, картинками на доске во время лекции, выдумками для стимулирования воображения учеников» (1928, стр. 18). Уайльдер (R. L. Wilder) думает, что доказательство представляет «только процесс испытания, которому мы подвергаем внушения нашей интуиции» (1944, стр. 318). Полья указывает, что доказательства, даже если они неполны, устанавливают связи между математическими фактами и это помогает нам удерживать их в нашей памяти: доказательства дают мнемотехническую систему (1945, стр. 190—191).

Бета. На этот раз не **догадкой**, а **интуицией**!

Учитель. Я ненавижу вашу претенциозную «интуицию». Я уважаю сознательную **догадку**, потому что она происходит от лучших человеческих качеств: смелости и скромности.

Бета. Я предложил теорему: «Все выпуклые многогранники являются эйлеровыми». Против нее вы произнесли речь. Можете ли вы предложить контрпример?

Учитель. Вы не можете быть уверены, что я этого не сделаю. Вы **улучшили** первоначальную догадку, но вы не можете требовать признания, что **усовершенствовали** эту догадку, чтобы достичь совершенной строгости в вашем доказательстве.

Бета. А **вы** это можете?

Учитель. Я тоже не могу. Но я думаю, что мой метод улучшения догадок будет улучшением вашего, так как я установлю единство, настоящее взаимодействие между доказательствами и контрпримерами.

Бета. Я готов учиться.

г) Метод исправления монстров

Ро. Сэр, могу я мимоходом сказать несколько слов?

Учитель. Пожалуйста.

Ро. Я согласен, что мы должны отбросить данный Дельтой метод устранения монстров как общий методологический подход, потому что этот метод не рассматривает монстры серьезно. Бета тоже не рассматривает свои «исключения» серьезно; он просто составляет их список, а потом уходит в безопасную область. Таким образом, оба эти метода интересны только в ограниченном, привилегированном поле. Мой метод не практикует дискриминации. Я могу показать, что «при более пристальном рассмотрении исключения становятся лишь кажущимися и теорема Эйлера сохраняет свою силу даже для так называемых исключений» [46].

Учитель. В самом деле?

Альфа. А как может быть обыкновенным эйлеровым многогранником мой третий контрпример «морской еж»? (См. рис. 7.) В качестве граней он имеет 12 звездчатых пятиугольников.

Ро. Я не Вижу никаких «звездчатых пятиугольников». Разве вы не видите, что в действительности этот многогранник имеет обыкновенные треугольные грани. Их всего 60. Он имеет также 90 ребер и 32 вершины. Его «эйлерова» характеристика равна 2 [47]. Двенадцать «звездчатых пятиугольников», их 30 «ребер» и 12 «вершин», дающих характеристику 6, существуют только в. вашей фантазии. Существуют не монстры, а только монстролюбивые толкования. Нужно очистить свой ум от извращенных иллюзий, надо научиться видеть и правильно определять, что видишь. Мой метод терапевтический: там где вы — ошибочно — «видите» контрпример, я учу вас узнавать — правильно — простой пример. Я исправляю ваше

---

[46] L. Matthiessen (1863).

[47] Аргументация, что «морской еж» является «в действительности» обыкновенным прозаическим эйлеровым многогранником с 60 треугольными гранями, 90 ребрами и 32 вершинами — «un hexacontaedre sans epithete» — была выставлена крепким бойцом за правильность эйлеровой теоремы Жонкьером (1890а, стр. 115). Однако идея понимания неэйлеровых звездчатых многогранников, как эйлеровых многогранников, состоящих из треугольников, но происходит от Жонкьера, но имеет драматическую историю (см. примечание 49).

монстролюбивое зрение[48].

__Альфа.__ Сэр, пожалуйста, объясните ваш метод, прежде чем Ро выстирает наши мозги[49].

__Учитель__. Пусть он продолжает.

__Ро__. Я уже высказал, что хотел.

__Гамма.__ Не могли бы вы поговорить подробнее относительно вашей критики метода Дельты? Вы оба заклинали монстров...

__Ро__. Дельта попался в плен ваших галлюцинаций. Он согласился, что наш «морской еж» имеет 12 граней, 30 ребер и 12 вершин и не является эйлеровым. Его тезис заключался в том, что «морской еж» даже не является многогранником. Но он ошибся в том и другом смысле. Ваш «морской еж» является и **многогранником** и притом **эйлеровым**. Но его звездчато-многогранное понимание было неправильным толкованием. С вашего разрешения, это не воздействие «морского ежа» на здоровый чистый ум, но искаженное воздействие на больной ум, корчащийся в муках[50].

__Каппа.__ Но как вы можете отличать здоровые мозги от больных, рациональные толкования от уродливых? [51]

---

[48] Ничто не может быть более характерным для догматистской теории познания, как ее теория ошибок. Действительно, если некоторые истины очевидны, то нужно объяснить, каким образом кто-нибудь может в них ошибаться, иными словами, почему истины не бывают для всех очевидными. Каждая догматистская теория познания в соответствии со своей частной теорией ошибок предлагает свою частную терапевтику для очистки мозга от ошибок. [Ср. Поппер (1963), Введение.]

[49] Пуансо наверняка выстирал свои мозги когда-то между 1809 и 1858 годами. Ведь как раз Пуансо снова открыл звездчатые многогранники, впервые проанализировал их с точки зрения эйлеровости и установил, что некоторые из них, вроде нашего малого звездчатого додекаэдра, не удовлетворяют формуле Эйлера (1809). И вот этот самый Пуансо категорически утверждает в своей работе (1858), что формула Эйлера «верна не только для выпуклых многогранников, но и для любого какого угодно многогранника, включая и звездчатые». На стр. 67 Пуансо для звездчатых многогранников употребляет термин «polyedres d'espece superieure». Противоречие очевидно. Как его объяснить? Что случилось с **контрапримером** — звездчатым многогранником? Ключ лежит в первой, невинно выглядящей сентенции статьи: «Всю теорию многогранников можно привести к теории многогранников с треугольными гранями». Иными словами, Пуансо — Альфа после стирки мозгов превратился в Пуансо — Ро; теперь он видит одни лишь треугольники там, где раньше видел звездчатые многоугольники; теперь он видит только примеры там, где раньше видел контрапримеры. Самокритика, должно быть, производилась потихоньку, скрыто, так как в научной традиции не существует образцов для выполнения таких поворотов. Можно только задуматься, встретились ли ему когда-нибудь кольцеобразные грани, и если да, то сумел ли он сознательно перетолковать их своим треугольным зрением.

Изменение зрения не всегда действует в том же самом направлении. Например, Беккер (I. C. Becker) в своей работе (1869), увлеченный новосозданными понятиями одно- и многосвязных областей (Риман, 1851), допускал кольцеобразные многоугольники, но остался слепым по отношению к звездчатым (стр. 66). Через пять лет после этой статьи, в которой претендовал на «окончательное» решение задачи, он расширил свое зрение и снова увидел звездчато-многоугольные и звездчато-многогранные фигуры там, где раньше видел лишь треугольники и треугольные многогранники (1874).

[50] Это часть стоической теории ошибок, приписываемой Хрисиппу [см. Аэций (ок. 150, IV, 12, 4); также Секст Эмпирик (ок. 190, I, 249)]. По теории стоиков «морской еж» составляет часть внешней действительности, которая производит впечатление на нашу душу: это phantasia или visum. «Умный человек не должен допускать некритического принятия (synkatathesis или adsensus) phantasia, пока она не созреет в ясную и определенную идею (phantasia kataleptike или comprehensio), чего она не может сделать, если является ложной. Совокупность ясных и определенных идей образует науку (episteme). В нашем случае воздействие «морского ежа» на мозг Альфы будет малым звездчатым додекаэдром, а на мозг Ро — треугольным гексакоптаэдром. Ро хочет претендовать на то, что звездчато-многогранное зрение Альфы, вероятно, не сможет созреть в ясную и определенную идею, очевидно, потому, что оно опровергает «доказанную» формулу Эйлера. Таким образом, звездчато-многогранное толкование отпадет, и ясным и определенным станет его «единственная» альтернатива, а именно треугольное толкование.

[51] Это стандартная критика скептиков претензий стоиков, что они могут отличить phantasia от

Ро. А меня только удивляет, как вы можете их смешивать.

Сигма. А вы, Ро, действительно думаете, что Альфа никогда не замечал, что его «морской еж» мог быть истолкован как треугольный многогранник? Конечно, он мог это заметить. Но более внимательный взгляд открывает, что эти треугольники всегда лежат по пяти в одной плоскости и окружают в телесном угле правильный пятиугольный тайник — как бы их сердце. Но пять правильных пятиугольников составляют так называемую пентаграмму, которая, по словам Теофраста Парацельза, была знаком здоровья...[52]

Ро. Суеверие!

Сигма. И вот таким образом для **здорового** ума открывается тайна «морского ежа»: это новое до сих пор еще неведомое правильное тело с правильными гранями и равными телесными углами, красота симметрии которого может открыть нам тайны всеобщей гармонии...[53]

Альфа. Благодарю вас, Сигма, за вашу защиту, которая еще раз убеждает меня, что оппоненты могут причинить меньше помех, чем союзники. Конечно, мою многогранную фигуру можно толковать или как треугольный или как звездчатый многогранник. Я согласен одинаково допустить оба толкования...

Каппа. Вы согласны?

Дельта. Но, конечно, одно из них будет **истинным** толкованием.

Альфа. Я согласен одинаково допустить оба толкования, но одно из них наверняка будет глобальным контрапримером для догадки Эйлера. Зачем же допускать только то толкование, которое «хорошо подходит» к предвзятым мнениям Ро? Во всяком случае, сэр, не объясните ли вы нам теперь ваш метод?

д) Улучшение догадки методом включения лемм. Рожденная доказательством теорема против наивной догадки

Учитель. Вернемся к раме картины. Во-первых, я признаю, что она является настоящим глобальным контрапримером для эйлеровой догадки, а также настоящим локальным контрапримером для первой леммы моего доказательства.

Гамма. Извините меня, сэр, но каким образом рама картины опровергает первую лемму?

Учитель. Выньте сначала одну грань, а потом попробуйте растянуть ее в плоскую фигуру на доске. Вам это **не** удастся.

Альфа. Чтобы помочь вашему воображению я скажу, что после вынимания грани вы можете растянуть оставшееся на доске у тех и только тех многогранников, которые надуванием возможно превратить в шар.

Очевидно, что такой «сферический» многогранник можно растянуть на плоскости, когда одна грань будет вынута; также очевидно, что и, наоборот, если многогранник без одной грани можно растянуть на плоскости, то вы можете согнуть его так, чтобы он мог обтянуть круглый сосуд, который затем можно закрыть недостающей гранью, и таким образом получить сферический многогранник. Но нашу картинную раму никак нельзя надуть так, чтобы она обратилась в шар; она может обратиться только в тор.

Учитель. Хорошо. Теперь вопреки Дельте я принимаю эту картинную раму в качестве критики для догадки. Поэтому я устраняю как ложную первоначальную форму догадки, но сразу же выдвигаю видоизмененную ограничивающую версию, а именно догадка Декарта — Эйлера справедлива для «**просты**х» многогранников, т.

---

phantasia kataleptike [см, Секст Эмпирик (ок. 190, I, 405)].

[52] Кеплер (1619), кн. II, предложение XXVI.

[53] Это точное изложение взглядов Кеплера.

е. для таких, которые после выемки одной грани могут быть растянуты на плоскости. Таким образом, из первоначальной гипотезы мы кое-что спасли. Мы имеем: **эйлерова характеристика простого многогранника равна 2**. Этот тезис не может быть опровергнут ни кубом в кубе, ни тетраэдрами-близнецами или звездчатыми многогранниками, так как ни одно из этих тел не будет «простым». Таким образом, если метод устранения исключений уменьшал область применимости основной догадки и подозрительной леммы, сводя их к общей безопасной области, и поэтому принимал контрпример как критику и основной догадки и доказательства, то мой метод включения лемм сохраняет доказательство, но ограничивает область правильности основной догадки, сводя ее к истинной области подозрительной леммы. Иначе, если контрпример, являющийся одновременно и глобальным и локальным, заставлял устрани теля исключений пересмотреть как леммы, так и первоначальную догадку, то меня он заставляет пересмотреть первоначальную догадку, но не леммы. Вы понимаете?

Альфа. Думаю, что да. Для доказательства, что я понимаю, я опровергну вас[54]

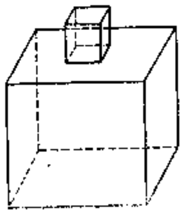


Рис. 12

Рис. 12

Учитель. Мой метод или мою исправленную догадку?

Альфа. Вашу исправленную догадку.

Учитель. Тогда может быть вы все же не понимаете моего метода. Но давайте ваш контрпример.

Альфа. Рассмотрим куб с маленьким кубом, поставленным сверху (рис. 12). Это согласно со всеми нашими определениями (определения 1, 2, 3, 4, 4'). Следовательно, это будет настоящим многогранником. И он «простой», так как может быть растянут на плоскости. Таким образом, согласно вашей исправленной догадке, его эйлерова характеристика должна быть равна 2. Тем не менее он имеет 16 вершин, 24 ребра и 11 граней, и его эйлерова характеристика будет 16—24 + 11 = 3. Это будет глобальным контрпримером для вашей исправленной догадки и также, между прочим, для первой теоремы Беты, «устраняющей исключения». Этот многогранник **не будет** эйлеровым, хотя он не имеет ни полостей, ни туннелей, ни кратной структуры.

Дельта. Этот увенчанный куб назовем **контрпримером 6** [55].

---

54 Я припоминаю, что Поппер различал три уровня понимания. Самый низший — это приятное чувство, что понял аргументацию. Средний уровень — это когда можешь повторить ее. Высший уровень — когда можешь опровергнуть ее.

55 Контрпример 6 был замечен Люилье (1812—1813, стр. 186); Жергонн сразу принял новизну его открытия. Но почти через пятьдесят лет Пуансо не слышал о нем (1858), а Маттисен (1863) и восьмьюдесятью годами позже де Жонкьер (1890 b) рассматривали его как монстр (см. подстрочные примечания 49 и 59). Примитивные устранители девятнадцатого века присоединили его к списку других исключений в качестве курьеза: «В качестве первого примера обыкновенно показывают случай трехгранной пирамиды, прикрепленной к грани тетраэдра так, чтобы ни одно ребро первой не совпадало с ребром второй. “Довольно странно, что в этом случае V — E + F = 3, — вот что написано в моем учебнике для коллежей. И этим кончилось дело”» [Маттисен (1863, стр. 449)]. Современные математики стремятся забыть о кольцеобразных гранях, которые могут быть несущественными для классификации **трубопроводов**, но могут получить значение в других контекстах. Штейнгауз говорит в своей книге (1960): «Разделим глобус на F стран (мы будем

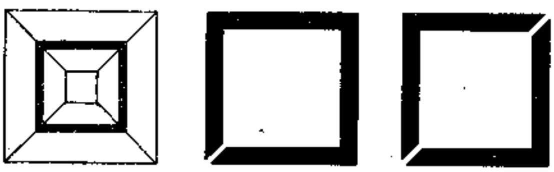
Учитель. Вы сделали ложной мою исправленную догадку, но **не** уничтожили моего метода улучшения. Я снова пересмотрю доказательство и постараюсь узнать, почему оно не подходит к вашему многограннику. В доказательстве должна быть еще одна неправильная лемма.

Бета. Ну, конечно, так и есть. Я всегда подозревал вторую лемму. Она предполагает, что в триангуляционном процессе, проводя новое диагональное ребро, вы всегда увеличиваете на единицу числа и ребер и граней. Это неверно. Если мы посмотрим на плоскую сетку нашего увенчанного куба, то найдем кольцеобразную грань (рис. 13, а). В этом случае одно диагональное ребро не увеличит числа граней (рис. 13, б); нужно увеличить число ребер на два, чтобы число граней увеличилось на единицу (рис. 13, в).

Учитель. Примите мои поздравления. Я, конечно, должен еще больше ограничить нашу догадку...

Бета. Я знаю, что вы хотите сделать. Вы скажете, что **простые многогранники с треугольными гранями будут эйлеровыми**. Вы сохраните триангуляционный процесс и включите эту лемму в условия.

Учитель. Нет, вы ошибаетесь. Прежде чем конкретно указать вашу ошибку, мне хочется остановиться на вашем методе устранения исключений. Когда вы сводите вашу догадку к «безопасной» области, вы по-настоящему не рассматриваете доказательства и действительно для вашей цели это не нужно. Вам достаточно будет лишь сделать небрежное замечание, что в вашей ограниченной области будут справедливы все леммы, какими бы они ни были. Но для меня этого недостаточно. Ту самую лемму, которая была опровергнута контрапримером, я **встраиваю** в догадку, так что мне нужно отметить ее и сформулировать насколько возможно точно на основании тщательного анализа доказательства. Таким образом, опровергнутая лемма включается в исправленную догадку. Ваш метод не заставляет вас производить очень трудную **разработку доказательства**, так как в вашей исправленной догадке доказательство не появляется, как в моей. Теперь я возвращаюсь к вашему теперешнему замечанию. Опровергнутая кольцеобразной гранью лемма не формулировалась, как вы, по-видимому, думаете, что «**все грани треугольны**», но что «**всякая грань, рассеченная диагональным ребром, распадается на две части**». Вот эту-то лемму я и превращаю в условие. Удовлетворяющие ему грани я называю «односвязными» и могу сделать второе улучшение моей первоначальной догадки: «**для простого многогранника, у которого все грани односвязны, V — E + F = 2**». Причина вашего быстрого неправильного утверждения заключалась в том, что ваш метод не приучил вас к тщательному анализу доказательства. Этот анализ бывает иногда довольно тривиальным, но иногда действительно очень труден.



а б в

Рис. 13

рассматривать моря и океаны как землю). Тогда при любом политическом положении мы будем иметь V+F=E+2» (стр. 273). Но вряд ли можно думать, что Штейнгауз уничтожит Сан-Марино или Западный Берлин просто потому, что их существование опровергает теорему Эйлера. (Конечно, он может избежать того, чтобы озера, вроде Байкала, сделались странами, если назовет их озерами, так как он сказал, что только моря и океаны могут быть рассматриваемы как страны.)

Бета. Я понимаю вашу идею. Я тоже должен добавить самокритическое замечание к вашим словам, так как мне кажется, что они открывают целый континуум положений для устранения исключений. В самом худшем случае просто устраняются некоторые исключения и не обращается никакого внимания на доказательство. Мистификация получается, когда мы отдельно имеем доказательство и также отдельно исключения. В мозгу таких примитивных устранителей исключений доказательства и исключения помещаются в двух совершенно разделенных помещениях. Другие могут теперь указать, что доказательство будет действительным только в ограниченной области, в чем, по их мнению, и заключается раскрытие тайны. Но все же их «условия» для идеи доказательства будут посторонними[56]. Лучшие устранители исключений бросают беглый взгляд на доказательство и, как я в настоящую минуту, получают некоторое вдохновение для формулировки условий, определяющих безопасную область. Самые лучшие устранители исключений производят тщательный анализ доказательства и на этом основании дают очень тонкое ограничение запрещенной площади. В этом отношении наш метод действительно представляет предельный случай метода устранения исключений...

Йота ...и обнаруживает фундаментальное диалектическое единство доказательств и опровержений.

Учитель. Я надеюсь, что теперь вы все видите, что доказательства, хотя иногда правильно и не **доказывают**, но определенно помогают **исправить** (improve) нашу догадку[57]. **Устранители исключений тоже исправляли ее, но исправление было независимым от доказательства** (proving). **Наш метод исправляет доказывая** (improves by proving). **Внутреннее единство между «логикой открытия» и «логикой оправдания» является самым важным аспектом метода инкорпорации лемм**.

Бета. И, конечно, теперь я понимаю ваши предыдущие удивившие меня замечания, что вы не смущаетесь, если догадка будет одновременно и «доказана» и опровергнута, а также, что вы готовы доказать даже неправильную догадку.

Каппа (в сторону). Но зачем же называть «доказательством» (proof) то, что фактически является «исправлением» (improof) ?

Учитель. Обратите внимание, что немногие люди захотят разделить эту готовность. Большая часть математиков вследствие укоренившихся эвристических догм неспособны к одновременному доказательству и опровержению догадки. Они будут **или** доказывать, **или** опровергать ее. В особенности они не способны опровержением исправлять догадки, если эти последние будут их собственными. **Они хотят исправлять свои догадки без опровержений; о ни никогда не уменьшают неправильности, по непрерывно увеличивают истинность; таким образом рост знания они очищают от ужаса контрапримеров.** Может быть, это и является основой подхода лучшего сорта устранителей исключений; они **начинают** со «стремления к безопасности» и придумывают доказательство для «безопасной» области, а **продолжают** работу, подвергая это доказательство глубокому

---

[56] «Мемуар Люилье состоит из двух совершенно **различных** частей. В первой автор предлагает первоначальное доказательство теоремы Эйлера. Во второй он ставит цель указать исключения, которые имеет эта теорема» (Примечание Жергонна-издателя к статье Люилье в книге Люилье (1812—1813, стр. 172). Подчеркнуто мной.— Авт.].

Захариас (Zacharias) в своей работе (1914—1931) дает некритическое, но верное описание такого разделения на два помещения: «В XIX столетии геометры, кроме нахождения новых доказательств теоремы Эйлера, занимались установлением исключений, которые эта теорема представляет в некоторых условиях. Такие исключения были, между прочим, установлены Пуансо. Люилье и Гессель попытались дать классификацию исключений...» (стр. 1052).

[57] Харди, Литтльвуд, Уайльдер, Полья, по-видимому, упустили это из вида (см. прим. 45).

критическому исследованию, испытывая, использовали ли они все поставленные условия. Если этого нет, то они «заостряют» или «обобщают» первую скромную версию их теоремы, т. е. выделяют леммы, от которых зависит доказательство, и инкорпорируют их. Например, после одного или двух контрапримеров они могут сформулировать **устраняющую исключения предварительную теорему**: «Все выпуклые многогранники являются эйлеровыми», откладывая невыпуклые объекты для cura posterior (дальнейшей работы - Лат.); затем они изобретают доказательство Коши и тогда, открывши, что выпуклость не была реально «использована» в доказательстве, они строят теорему, включающую леммы[58]. Нет ничего эвристически нездорового в процедуре, которая соединяет **предварительное устранение** исключений с последовательным анализом доказательства и включением лемм.

Бета. Конечно, эта процедура не уничтожает критику, она только отталкивает ее на задний план; вместо прямой критики чрезмерных утверждений критикуются недостаточные утверждения.

Учитель. Я очень рад, Бета, что убедил вас. А как вы, Ро и Дельта, думаете насчет этого?

Ро. Что касается меня, то я совершенно определенно думаю, что проблема кольцеобразных граней является псевдопроблемой. Она происходит от чудовищного истолкования того, что представляют грани и ребра этого соединения двух кубов в один, который вы назвали «увенчанным кубом».

Учитель. Объясните.

Ро. «Увенчанный куб» представляет многогранник, состоящий из двух кубов, **припаянных** один к другому. Вы согласны?

Учитель. Не возражаю.

Ро. Тогда вы неправильно понимаете термин «припаянный». «Припой» состоит из ребер, связывающих вершины нижнего квадрата маленького куба с соответствующими вершинами верхнего квадрата большого куба. Поэтому вообще не существует никаких кольцеобразных граней.

Бета. Кольцеобразная грань здесь существует! Рассекающих ребер, о которых вы говорите, здесь нет!

Ро. Они только скрыты от вашего ненатренированного глаза (рис. 14, в)[59] ...

---

[58] Этот стандартный образец является по существу единственным описанным в классической книге Полья и Сеге (Szego, 1925, стр. VII): «Должно исследовать каждое доказательство, чтобы убедиться, действительно ли были использованы все предположения; нужно попытаться получить то же самое следствие из меньшего числа предположений... и удовлетвориться можно только, когда контрапримеры покажут, что границы возможного уже достигнуты».

[59] «Спаивание» двух многогранников при помощи скрытых ребер было выставлено в качестве аргументации Жонкьером (1890, стр. 171—172), который устранение монстров применяет против полостей и туннелей, а исправление — против увенчанных кубов и звездчатых многогранников. Первым протагонистом использования исправления монстров в защите теоремы Эйлера был Маттисен (1863). Он последовательно использует исправление монстров; при помощи введения скрытых ребер и граней ему удается «выяснить» всякую неэйлеровость, включая многогранники с туннелями и полостями. В то время как у Жонкьера спаивание представляет полную триангуляцию кольцеобразной грани, Маттисен спаивает с экономией, проводя лишь минимальное число ребер, превращающих грань в односвязные подграни (рис. 14). Маттисен удивительно уверен в своем методе превращения революционных контрапримеров в хорошо исправленные буржуазные эйлеровы образцы. Он считает, что «всякий многогранник может быть так проанализирован, что будет подтверждать теорему Эйлера...». Он перечисляет предполагаемые исключения, отмеченные поверхностным наблюдателем, и затем утверждает: «В каждом таком случае мы можем показать, что многогранник имеет скрытые грани и ребра; если пересчитать их, то они делают теорему $V — E + F = 2$ справедливой даже для этих видимых исключительных случаев».

Мысль, что при помощи проведения дополнительных ребер, или граней, некоторые неэйлеровы многогранники могут быть преобразованы в эйлеровы, происходит, однако, не от Маттисена, но от Гесселя. Последний иллюстрировал это тремя примерами, используя изящные фигуры (1832, стр. 14—15). Но он использовал этот метод не для «исправления», но, наоборот, для «разъяснения исключений», показывая «совершенно аналогичные многогранники, для которых эйлеров закон

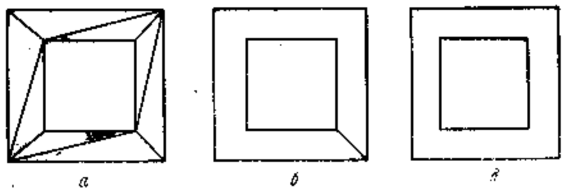


Рис. 14.

Бета. Неужели вы думаете, что мы всерьез примем ваши аргументы? Я вижу здесь только суеверие, а ваши «скрытые» ребра неужели это реальность?

Ро. Посмотрите на этот кристалл соли. Скажете ли вы, что это куб?

Бета. Конечно.

Ро. Куб имеет 12 ребер, не так ли?

Бета. Да, имеет.

Ро. Но на этом кубе вообще нет никаких ребер. Они скрыты. Они появляются только в нашей рациональной реконструкции.

Бета. Я подумаю насчет этого. Ясно только одно. Учитель критиковал мою самоуверенную точку зрения, что мой метод приводит к определенности, а также то, что я забыл о доказательствах. Эта критика вполне подойдет и к вашему «исправлению монстров», и к моему «устранению ошибок».

Учитель. А как вы, Дельта? Как вы будете заклинать кольцеобразные грани?

Дельта. Я не буду. Вы обратили меня в вашу веру. Я только удивляюсь, почему вы не добиваетесь полной уверенности и не включаете также и пренебреженную **третью** лемму? Я предлагаю четвертую и, надеюсь, окончательную формулировку: «эйлеровыми являются все многогранники, которые будут (a) простыми, (b) имеют только односвязные грани и (c) таковы, что треугольники плоской треугольной сети, полученной после растягивания на плоскости и триангулирования, могут быть так перенумерованы, что при устранении их в определенном порядке V—E+F не изменится до достижения последнего треугольника»[60]. Я удивляюсь, почему вы не предложили этого сразу. Если вы действительно принимаете серьезно ваш метод, то вы **все** леммы должны превратить **непосредственно** в условия. Почему такое «постепенное построение»?

Альфа. Консерватор обратился в революционера! Ваш совет кажется мне слишком утопичным. Потому что ровно трех лемм не существует. А то почему бы не добавить вместе со многими другими еще и такие: (4) «если 1 + 1 = 2» и (5) «если все треугольники имеют три вершины и три угла», так как мы, конечно, эти леммы тоже используем? Я предлагаю в условия превратить только те леммы, для которых был найден контрапример.

Гамма. Мне кажется, что принять это в качестве методологического правила будет слишком оппортунистичным. Включим в целое только те леммы, против которых мы можем **ожидать** контрапримера, т. е. такие, которые, очевидно, не будут несомненно истинными.

Дельта. Ну, хорошо, кажется ли кому-нибудь вполне очевидной наша третья лемма? Превратим ее в третье условие.

Гамма. А что если операции, выраженные леммами нашего доказательства, не будут все независимыми? Если выполнимы некоторые из этих операций, то может случиться, что и остальные будут **необходимо** выполнимыми. Я например,

справедлив».

60 Эта последняя лемма слишком строга. Для целей доказательства достаточно будет заменить ее такой леммой, что «для получающейся после растягивания и триангулирования плоской треугольной сети V — E + F = 1». Коши, по-видимому, не заметил эту разницу.

подозреваю, что если **многогранник простой, то всегда существует такой порядок устранения треугольников в получающейся плоской сети, что V — E + F не изменяется**. А если так, то инкорпорирование в догадку первой леммы избавит нас от инкорпорирования третьей.

Дельта. Вы считаете, что первое условие предполагает третье. Можете ли вы доказать это?

Эпсилон. Я могу[61].

Альфа. Действительное доказательство, как бы оно интересно ни было, не может помочь нам в решении нашей задачи: как далеко должны мы идти в исправлении нашей догадки? Охотно допускаю, что вы действительно имеете такое доказательство, как говорите, но это только заставит нас разложить эту третью лемму на несколько новых подлемм. Должны ли мы и их превратить в условия? Где же тогда мы остановимся?

Каппа. В доказательствах существует бесконечный спуск; поэтому доказательства не доказывают. Вы должны понять, что доказывание представляет игру, в которую играют, пока это доставляет удовольствие, и прекращают, когда устанешь.

Эпсилон. Нет, это не игра, а серьезное дело. Бесконечный спуск может быть задержан тривиально истинными леммами, которые уже не надо превращать в условия.

Гамма. Вот я как раз так и думаю. Мы не обращаем в условия те леммы, которые могут быть доказаны на основании тривиально истинных принципов. Также мы не инкорпорируем те леммы, которые могут быть доказаны (возможно с помощью таких тривиально истинных принципов) на основании ранее установленных лемм.

Альфа. Согласен. Мы можем прекратить исправление нашей догадки после того, как превратим в условия эти две нетривиальные леммы. Я действительно думаю, что такой метод исправления при помощи включения лемм не имеет недостатков. Мне кажется, что он не только исправляет, но даже **совершенствует** догадку. И я отсюда узнал нечто важное, а именно, что неправильно будет утверждать, что целью «задачи на доказательство» является заключительный показ, будет ли некоторое ясно сформулированное утверждение истинным или что оно будет ложным[62]. **Настоящей целью «задачи на доказательство» должно быть исправление** — фактически усовершенствование — первоначальной **«наивной» догадки** в подлинную **«теорему»**. Нашей наивной догадкой была: «Все многогранники являются эйлеровыми».

Метод устранения монстров защищает эту наивную догадку при помощи истолкования ее терминов таким образом, что под конец мы получаем **теорему, устраняющую монстры**: «Все многогранники являются эйлеровыми». Но тождественность лингвистических выражений наивной догадки и теоремы, устраняющей монстры, кроме тайных изменений в смысле терминов, скрывает и существенное улучшение.

Метод устранения исключений вводит элемент, являющийся фактически чуждым аргументации: выпуклость. **Устраняющая исключения теорема** была: «Все выпуклые многогранники являются эйлеровыми».

Метод включения лемм основывался на аргументации, т.е. на доказательстве — и ни на чем другом. Он как бы **резюмирует доказательство в теореме, включающей леммы**: «Все простые многогранники с односвязными гранями

---

[61] В действительности такое доказательство было впервые предложено Рейхардом (H. Reichardt, 1941, стр. 23), а также Ван дер Варденом (1941). Гильберт и Кон-Фоссен были удовлетворены лишь тем, что истинность утверждения Беты «легко увидеть» (1932, стр. 292 английского перевода).

[62] Polya (1945, стр. 142).

являются эйлеровыми».

Это показывает, что (теперь я употребляю термин «доказывание» в традиционном смысле) **человек не доказывает того, что он намеревался доказать**. Поэтому ни одно доказательство не должно кончаться словами: «Quod erat demonstrandum»[63].

Бета. Одни говорят, что в порядке открытия теоремы предшествуют доказательствам: «Прежде чем доказать теорему, надо угадать ее». Другие отрицают это и считают, что открытие совершается путем вывода заключений из специально установленного ряда предпосылок и выделения интересных заключений, если нам посчастливится найти их. Или, если использовать прекрасную метафору одного из моих друзей, некоторые говорят, что эвристическое «застегивание молнии» в дедуктивной структуре идет снизу — от заключения — кверху —- к посылкам[64], другие же говорят, что оно идет вниз — от вершины ко дну. Как думаете вы?

Альфа. Что ваша метафора неприложима к эвристике. Открытие не идет ни вниз, ни вверх, но следует по зигзагообразному пути: толкаемое контрапримерами, оно движется от наивной догадки к предпосылкам и потом возвращается назад, чтобы уничтожить наивную догадку и заменить ее теоремой. Интуитивная догадка и контрапримеры не выявляются во вполне готовой дедуктивной структуре: в окончательном продукте нельзя различить зигзаг открытия.

Учитель. Очень хорошо. Однако добавим из осторожности, что теорема **не всегда** отличается от наивной догадки. Мы не всегда обязательно исправляем доказывая. Доказательства могут исправлять, когда их идея открывает в наивной догадке неожиданные аспекты, которые потом появляются в теореме. Но в **зрелых** теориях так может и не быть. Так наверняка бывает в молодых **растущих** теориях. Первичной характеристикой последних является именно это переплетение открытия и подтверждения, исправления и доказательства.

Каппа (в сторону). Зрелые теории могут быть омоложены. Открытие всегда заменяет подтверждение.

Сигма. Эта классификация соответствует моей. Первый вид моих предложений был зрелого типа, третий же растущего...

Гамма (прерывает его). Теорема неверна! Я нашел для нее контрапример.

5. Критика анализа доказательства контрапримерами, являющимися глобальными, но не локальными. Проблема строгости.

а) Устранение монстров в защиту теоремы

Гамма. Я только что понял, что мой **контрапример 5** с цилиндром опровергает не только наивную догадку, но также и теорему. Хотя он удовлетворяет обеим леммам, он все же неэйлеров.

Альфа. Дорогой Гамма, не будьте чудаком. Пример с цилиндром был шуткой, а не контрапримером. Ни один серьезный математик не будет считать цилиндр многогранником.

Гамма. Почему же тогда вы не протестовали против **контрапримера 3** —

---

[63] Эта последняя фраза взята из интересной работы Алисы Амброз (Alice Ambrose, 1959, стр. 438).

[64] См. примечание 17. Метафора «застегивания молнии» изобретена Брайтвайтом (R. B. Braithwaite); однако он говорит только о «логических» и «теоретико-познавательных» застегивателях молний, но не об «эвристических» (1953, особенно стр. 352).

моего «морского ежа?» Разве он менее «чуден», чем мой цилиндр? Конечно, **тогда** вы критиковали **наивную догадку** и приветствовали опровержения. **Теперь защищаете** теорему и ненавидите опровержения! Тогда при появлении контрапримера вы ставили вопрос, **в чем недостаток предположения. Теперь** спрашиваете, **в чем недостаток контрапримера.**

Дельта. Альфа, вы обратились в устранителя монстров? Это вас не смущает?[65]

б) Скрытые леммы

Альфа. Согласен. Я, может быть, несколько поторопился. Дайте подумать: имеются **три возможных типа контрапримеров**. Мы уже обсудили — первый — локальный, но не глобальный — он, конечно, не опровергает теоремы[66]. Вторым типом заниматься не надо; он одновременно и глобальный, и локальный. Он вовсе не опровергает теорему, а подтверждает ее[67]. Теперь мы имеем **третий** тип — глобальный, но не локальный. Он, конечно, опровергает теорему. Я не считал это возможным. Но Гамма думает, что его цилиндр как раз таким и будет. Если мы не хотим отбросить его как монстр, то должны допустить, что он является глобальным контрапримером: V — E + F = 1. Но, может быть, он принадлежит ко второму безобидному типу? Бьюсь об заклад, что он не удовлетворит по крайней мере одной из наших лемм.

Гамма. Проверим. Он, конечно, удовлетворяет первой лемме; если я выну грань-основание, то легко могу растянуть остальное на доске.

Альфа. Но если вы удалите боковую оболочку, то он распадется на два куска!

Гамма. Ну и что же? Первая лемма требует, чтобы многогранник был «простым», т. е. «чтобы по удалении одной грани его можно было растянуть па доске». Цилиндр удовлетворяет этому требованию, даже если вы начнете с отнимания оболочки. Вы требуете, чтобы цилиндр удовлетворял **добавочной** лемме, а именно, чтобы **получающаяся плоская сетка была тоже связной**. Но кто выдвигал когда-нибудь **такую** лемму?

Альфа. Всякий слово «растянут» понимал как «растянутый **одним куском**», «растянутый **без разрывов**». Мы решили не включать третью лемму, так как Эпсилон доказал, что она вытекает из двух первых[68]. Но посмотрите на доказательство: оно основано на допущении, что после растягивания получается **связная** сеть. Иначе для триангулированной сети V — E + F не будет 1.

Гамма. Почему же вы тогда не настаивали на том, чтобы выразить ее **явно**?

Альфа. Потому что мы считали, что это подразумевается **само собой**.

Гамма. Вы-то как раз наверняка так и не считали. Ведь вы предположили, что «простой» понимается как «могущий быть сжатым в шарик»[69]. Цилиндр **может** быть сжат в шарик, следовательно, **по вашей** интерпретации, он **удовлетворяет** первой лемме.

---

[65] Устранение монстров в защиту теоремы является очень важным приемом в неформальной математике. «В чем грешат примеры, для которых неверна формула Эйлера? Какие геометрические условия, уточняющие значения F, V и E, могут обеспечить справедливость формулы Эйлера?» [Polya (1954), I, упр. 29]. Цилиндр дается в упражнении 24. Ответ таков: «...ребро ...должно заканчиваться в углах» (стр. 225)... Полья формирует это вообще: «Довольно часто встречающееся в математических исследованиях положение заключается в следующем: теорема уже сформулирована, но нам требуется дать более точное определение смысла терминов, употребленных при формулировке, чтобы сделать ее строго доказанной» (стр. 55).

[66] Локальные, но не глобальные контрапримеры были разобраны в гл.3.

[67] Это соответствует парадоксу подтверждения [Гемпель (Hempel, 1945)].

[68] См. подстрочное примечание 61.

[69] См. реплику Альфы

Альфа. Хорошо... Но вы должны сознаться, что он не удовлетворяет **второй** лемме, что любая грань, рассеченная диагональю, распадается на два куска. Как вы будете триангулировать круг или оболочку? Односвязны ли эти грани?

Гамма. Конечно.

Альфа. Но на цилиндре диагоналей вообще не проведешь! Диагональ представляет собой ребро, связывающее две прилежащих вершины. А у цилиндра нет вершин!

Гамма. Не волнуйтесь. Если вы хотите показать, что круг не односвязен, то проведите диагональ, которая **не** образует новой грани.

Альфа. Не смейтесь; вы очень хорошо знаете, что я не могу.

Гамма. Тогда допускаете ли вы, что утверждение «в круге имеется диагональ, не образующая новой грани» ложно?

Альфа. Да, допускаю. Ну и что же?

Гамма. Тогда вы обязаны допустить, что отрицание этого суждения будет истинным, а именно, что «все диагонали круга производят новую грань», или, что «круг односвязен».

Альфа. Для вашей леммы: «все диагонали круга производят новую грань» вы не можете привести примера, поэтому ваша лемма не **истинна, а лишена смысла**. Ваше понимание истины ложно.

Каппа (в сторону). Сначала они ссорились из-за понятия многогранника, а теперь из-за понятия истины[70].

Гамма. Но вы уже допустили, что отрицание этой леммы было ложным! Может ли **предложение А не иметь смысла, а не-А иметь смысл и быть ложным**? В вашем понимании «смысла» что-то не в порядке.

Заметьте, я вижу ваше затруднение, но мы можем преодолеть его, изменив слегка формулировку. Назовем грань односвязной в случае, когда «**для всех *x*, если *x* есть диагональ, то *x* разрежет грань на две части**». Ни круг, ни оболочка не могут иметь диагоналей, так что в их случае при всяком *x* первая посылка будет всегда ложной. Поэтому условное предложение может быть проверено примером для любого предмета и будет и имеющим смысл, и истинным. Но и круг, и оболочка односвязны — значит цилиндр удовлетворяет второй лемме.

Альфа. Нет! Если вы не можете проводить диагонали и тем самым триангулировать грани, то никогда не получите плоской треугольной сетки и никогда не сможете завершить доказательство. Как же можете тогда требовать, чтобы цилиндр удовлетворял второй лемме? Разве вы не видите, что в лемме **должно быть условие существования**? Правильная интерпретация односвязности грани должна быть такой: «**Для всех *x*, если *x* есть диагональ, то *x* сечет грань надвое; и имеется по крайней мере один *x*, который будет диагональю**». Наша первоначальная формулировка, возможно, не выразила этого словами, но в ней было сделанное бессознательно «скрытое допущение»[71].

Все грани цилиндра не удовлетворяют ему; следовательно, цилиндр будет противоречащим примером, являющимся **одновременно** и глобальным, и локальным и он **не** опровергает теоремы.

Гамма. Вы сначала модифицировали лемму о растягивании введением «связности», а теперь и триангуляционную лемму введением вашего условия существования! И все эти темные разговоры о «скрытых допущениях.» только скрывают тот факт, что мой цилиндр заставил вас изобрести эти модификации.

---

[70] Истинные утверждения, не имеющие содержания (vacuously true), о которых говорит Гамма, представляют большое нововведение XIX в. Задний план этой проблемы еще не раскрыт.

[71] «Евклид употребляет аксиому, совершенно не сознавая ее» (Russell, 1903, стр. 407). «Сделать (sic!) скрытое допущение» является общей фразой у математиков и ученых. См. также обсуждение Гамовым доказательства Коши (1953, стр. 56) или Ивс-Ньюса (Eves-Newsom) об Евклиде (1958, стр. 84),

Альфа. Зачем темные разговоры? Мы уже согласились опускать, т. е. «скрывать», тривиально ясные леммы[72]. Зачем же нам тогда устанавливать и включать тривиально ложные леммы — они также тривиальны и также скучны! Держите их у себя в уме, но не формулируйте. Скрытая лемма не является ошибкой: это искусная стенография, указывающая на наше знание основ.

Каппа (в сторону). Знание основ — это когда мы допускаем, что знаем все, а в действительности не знаем ничего[73].

Гамма. Если бы вы сознательно ввели предположения, то они были бы таковы: (а) вынимание грани всегда оставляет связную сеть и (в) всякая нетреугольная грань может быть диагоналями разделена на треугольники. Пока они были в вашем **подсознании**, они считались тривиально **истинными**, но цилиндр заставил их перескочить в **сознательный** ваш перечень в качестве **тривиально ложных**. Пока вы не были уличены цилиндром, вы даже не могли думать, чтобы эти две леммы могли быть ложными. Если теперь вы говорите, что вы так думали, то вы переписываете историю, чтобы очистить ее от ошибки[74].

---

72 См. реплику Альфы

73 Хорошие учебники неформальной математики обычно уточняют свою «стенографию», т. е. те ложные или истинные леммы, которые они считают настолько тривиальными, что не заслуживают упоминания. Стандартное выражение для этого таково: «Мы предполагаем **знакомство** с леммами типа x». Количество того, что предполагается известным, уменьшается по мере того, как критика знание предполагаемое превращает в знание настоящее. Коши, например, даже не заметил, что его прославленное сочинение (1821) предполагало «знакомство» с **теорией действительных чисел**. Он отбросил бы как монстр всякий контрапример, который потребовал бы явного установления лемм о природе иррациональных чисел. Не так поступили Вейерштрасс и его школа: учебники по неформальной математике теперь содержат новую главу по теории действительных чисел, в которой собраны все эти леммы. Но в их «введениях» обычно принимается «знакомство **с теорией рациональных чисел**». См., например, Hardy «Pure Mathematics», начиная со второго издания (1914) и далее; в первом издании все еще считалось, что теория действительных чисел относится к предполагаемому у читателей знанию; или Rudin (1953). Более строгие учебники еще более уменьшают предполагаемое знание: Landau во введении к своей знаменитой книге (1930) предполагает знакомство только с «**логическим рассуждением и немецким языком**». Иронией судьбы Тарский в это же самое время показал, что опускаемые таким образом абсолютно тривиальные леммы могут быть не только неверными, но и несовместимыми, поскольку немецкий является семантически замкнутым языком. Кто может сказать, когда заявление «автор признает свое невежество в области *x*» заменит авторитетный эвфемизм «автор предполагает знакомство с областью *x*»? Наверное тогда, когда будет установлено, что знание не имеет основ.

74 Когда это было впервые открыто, такая скрытая лемма рассматривалась как ошибка. Когда Беккер первый указал на «скрытое» (stillscliweigend) предположение в доказательстве Коши (он цитировал доказательство из вторых рук через Балцера, 1826—1827), то он назвал его «ошибкой» (1869, стр. 67—68). Он обратил внимание на то, что Коши все многогранники рассматривал как простые; его лемма была не только скрытой, но и ложной. Однако историки не могут представить себе, чтобы большие математики делали такие ошибки. Настоящую программу, как нужно фальсифицировать историю, можно найти у Пуанкаре (1908): «Доказательство, не являющееся строгим, есть ничто. Я думаю, что никто не станет оспаривать эту истину. Но если принимать ее слишком буквально, то мы должны прийти к заключению, что, например, до 1820 г. не существовало математики; это, очевидно, было бы чрезмерным: геометры того времени быстро понимали то, что мы теперь объясняем пространно и долго. Это не значит, что они этого совершенно не замечали, но они слишком скоро проходили через это. А заметить это как следует сделало бы необходимым потрудиться сказать это» (стр. 374). Замечание Беккера об «ошибке» Коши должно быть переписано на манер 1984 г.: «double plus ungood refs unerrors rewrite fullwise» («Язык 1984 года», изобретенный английским писателем Орвеллом, не создает новых слов, но отбрасывает лишние. Зачем писать «и», если существует термин «плюс», или «плохой», если можно сказать «нехороший»? В переводе на русский язык фраза звучала бы так: «двоякие плюс нехорошие опровержения неошибок переписывать полностью».— Прим. пер.). Это переписывание было сделано Штейпицем, который настаивал на том, что «тот факт, что эта теорема не могла быть верной в общем случае, вероятно, не мог оставаться незамеченным» (1914—1931, стр. 20). Пуанкаре сам применил свою программу к эйлеровой теореме: «Известно, что Эйлер доказал равенство V — E + F = 2 для **выпуклых** многогранников» (1893). Эйлер, конечно, высказал свою

Тета. Не так давно, Альфа, вы осмеивали «скрытые» дополнительные условия, которые вырастали в определениях Дельты после каждого опровержения. А теперь это вы делаете «скрытые» дополнительные условия в леммах после каждого опровержения; это вы меняете свою позицию и стараетесь скрыть ее, чтобы спасти лицо. Вас это не смущает?

Каппа. Ничто не может так меня позабавить, как припертый к стене догматик. Надевши платье воинствующего скептика для уничтожения меньших порослей догматизма, Альфа теперь приходит в волнение, когда в свою очередь **он** тоже загоняется в угол такими же скептическими аргументами. Теперь он играет ва-банк, пытаясь одолеть контрапримеры Гаммы сначала при помощи защитного механизма, который он сам же обличил и запретил (устранение монстров), а затем проведя контрабандой резерв «скрытых лемм» в доказательство и соответствующих «скрытых условий» в теорему. Так в чем же разница?

Учитель. Помехой для Альфы был, конечно, догматический подход в его истолковании включения лемм. Он думал, что тщательное рассмотрение доказательства может дать совершенный анализ доказательства, содержащий **все** ложные леммы (так же, как и Бета думал, что он может перечислить **все** исключения). Он думал, что при помощи их включения может получить не только улучшенную, но и **вполне совершенную теорему**[75], **не заботясь о контрапримерах**. Цилиндр показал ему, что он не прав, но, вместо того чтобы допустить это, он теперь хочет назвать полным анализ доказательства, если он содержит все **относящиеся** сюда ложные леммы.

в) Метод доказательств и опровержений

Гамма. Я предлагаю принять цилиндр в качестве настоящего контрапримера для рассматриваемой теоремы. Я изобретаю новую лемму (или леммы), которая этим примером опровергается, и добавляю эту лемму (леммы) к первоначальному списку. Это как раз и делал Альфа. Но, вместо того чтобы «скрывать» их так, чтобы они **сделались** скрытыми, я возвещаю их публично.

Теперь цилиндр, ставивший ранее в тупик,— опасный глобальный, а не локальный контрапример (третьего типа) по отношению к старому анализу доказательства и соответствующей старой теореме, этот цилиндр станет безопасным глобальным и одновременно локальным контрапримером (второго типа) по отношению к новому анализу доказательства и соответствующей новой теореме.

Альфа думал, что его классификация контрапримеров была абсолютной; в действительности же она относилась только к его анализу доказательства. По мере роста анализа доказательства контрапримеры третьего типа превращаются в контрапримеры второго типа.

Ламбда. Это верно. Анализ доказательства будет «строгим», или «имеющим силу», и соответствующая математическая теорема — истинной тогда и только тогда, если не будет для них контрапримеров третьего типа. Я называю этот критерий **принципом обратной передачи ложности**, так как он требует, чтобы глобальные контрапримеры были также локальными: ложность должна быть передана обратно от интуитивной догадки к леммам, от последующей части теоремы к предшествующей. Если какой-нибудь глобальный, но не локальный контрапример нарушает этот принцип, мы восстанавливаем его добавлением к анализу доказательства подходящей леммы. Таким образом, принцип обратной передачи ложности является **регулятивным принципом** для анализа

теорему для **всех** многогранников.

75 См. реплику Альфы.

доказательства in statu nascendi (в сстоянии зарождения), а глобальный, но не локальный контрапример — ферментом в росте анализа доказательства.

Гамма. Вспомните, раньше, даже не найдя ни одного опровержения, мы все же сумели обнаружить три подозрительные леммы и продвинуться в анализе доказательства!

Ламбда. Это верно. Анализ доказательства может начинаться не только под давлением глобальных контрапримеров, но также и когда люди уже выучились остерегаться «убедительных» доказательств[76].

В первом случае все глобальные контрапримеры появляются в виде контрапримеров третьего типа и все леммы начинают свою карьеру в качестве «скрытых лемм». Они приводят нас к постепенному построению анализа доказательства и так один за другим превращаются в контрапримеры второго типа.

Во втором случае — когда мы уже начинаем подозревать и ищем опровержений,— мы можем прийти к далеко зашедшему вперед анализу доказательства без всяких контрапримеров. Тогда мы имеем две возможности. **Первая возможность** состоит в том, что нам при помощи локальных контрапримеров **удастся опровергнуть** все леммы, содержащиеся в нашем анализе доказательства. Мы можем установить, как следует, что они будут также глобальными контрапримерами.

Альфа. Вот именно так я и открыл раму картины: я искал многогранник, который после удаления одной грани не мог быть развернут в один лист на плоскости.

Сигма. Тогда не только опровержения действуют как ферменты для анализа доказательства, но и анализ доказательства может действовать как фермент для опровержения. Какой нехороший союз между кажущимися врагами!

Ламбда. Это верно. Если догадка кажется вполне допустимой или даже самоочевидной, то должно доказать ее; может оказаться, что она основана на весьма софистических и сомнительных леммах. Опровержение лемм может привести к какому-нибудь неожиданному опровержению первоначальной догадки.

Сигма. К опровержениям, порожденным доказательством!

Гамма. Тогда «мощь логического доказательства заключается не в том, что оно принуждает верить, а в том, что оно наводит на сомнения»[77].

Ламбда. Но позвольте мне вернуться ко **второй возможности**: когда мы не находим никаких локальных контрапримеров для подозреваемых лемм.

Сигма. То есть когда опровержения не помогают анализу доказательства. Что же тогда может случиться?

Ламбда. Мы тогда окажемся общепризнанными чудаками. Доказательство приобретает абсолютную респектабельность и леммы сбросят всякое подозрение. Наш анализ доказательства скоро будет забыт[78]. Без опровержений нельзя

---

[76] Наш класс был скорее передовым. Альфа, Бета и Гамма выразили подозрение против трех лемм, когда еще не появились глобальные контрапримеры. В действительной истории анализ доказательства появился позже через много декад: в течение долгого периода контрапримеры или замалчивались, или заклинались как чудовища, пли записывались как исключения. Эвристическое движение от глобального контрапримера к анализу доказательства — применение принципа обратной передачи ложности — было по существу неизвестно в неформальной математике раннего XIX столетия.

[77] Фордер (H. G. Forder, 1927, стр. VIII). Или «Одной из главных заслуг доказательств является то, что они внушают некоторый скептицизм по отношению к доказанному результату» (Russell, 1903, стр. 360. Он дает также великолепный пример).

[78] Хорошо известно, что критика может вызвать подозрение или даже иногда опровергнуть «априорные истины» и, таким образом, превратить **доказательства** в простые **объяснения**. **Такое отсутствие критицизма или опровержения** может превратить не вполне допустимые догадки в «априорные истины»: это не так хорошо известно, но как раз также очень важно. Два самых ярких примера этого представляют возвышение и падение Евклида и Ньютона. История их падения хорошо известна, но историю их возвышения обычно не вполне понимают.

поддерживать подозрение; прожектор подозрения скоро выключается, если контрапример не усиливает его, направляя яркий свет опровержения на пренебреженный аспект доказательства, который остался незамеченным в сумерках «тривиальной истины».

Все это показывает, что мы не можем поместить доказательство и опровержение на отдельные полочки. Вот почему я предлагаю наш «**метод включения лемм**» перекрестить в «**метод доказательств и опровержений**». Позвольте мне выразить его основные черты в трех эвристических правилах.

Правило 1. *Если вы имеете какую-нибудь догадку, то попробуйте доказать ее и опровергнуть ее. Тщательно рассмотрите доказательство, чтобы приготовить список нетривиальных лемм (анализ доказательства); найдите контрапримеры и для догадки (глобальные контрапримеры) и для подозрительных лемм (локальные контрапримеры).*

Правило 2. *Если у вас есть глобальный контрапример, то устраните вашу догадку, добавьте к вашему анализу доказательства подходящую лемму, которая будет опровергнута им, и замените устраненную догадку исправленной, которая включила бы эту лемму как условие*[79]. *Не позволяйте отбрасывать опровержения как монстры*[80]*. Сделайте явными все «скрытые леммы»*[81].

Правило 3. *Если у вас есть локальный контрапример, то проверьте его, не будет ли он также глобальным контрапримером. Если он будет им, то вы*

Геометрия Евклида, по-видимому, была предложена как космологическая теория (см. Popper, 1952, стр. 147—148). И ее «постулаты» и «аксиомы» (или «общие понятия») были предложены как смелые, вызывающие предложения, направленные против Парменида и Зенона, учения которых влекли за собой не только ложность, но даже логическую ложность, непредставимость этих «постулатов». Только позже «постулаты» были приняты как несомненно истинные, и смелые антипарменидовские «аксиомы» (вроде «целое больше части») были сочтены настолько тривиальными, что были опущены в позднейших анализах доказательства и превращены в «скрытые леммы». Этот процесс начался с Аристотеля; он заклеймил Зенона как любящего спорить чудака, и его аргументы как «софистику». Эта история была недавно рассказана с интересными подробностями Арпадом Сабо (1960, стр. 65—84). Сабо показал, что в эпоху Евклида слово «аксиома», как и «постулат», обозначало предположение в критическом диалоге (диалектическом), выставленное для того, чтобы проверить следствия, причем партнер по дискуссии **не обязан** был принимать его как истину. По иронии истории его значение оказалось перевернутым. Вершина авторитета Евклида была достигнута в век просвещения. Клеро побуждал своих товарищей не «затемнять доказательств и раздражать читателей», выставляя очевидные истины: Евклид делал это лишь для того, чтобы убедить «упорствующих софистов» (1741, стр. X и XI).

Далее **механика и теория тяготения Ньютона** были выставлены как смелая догадка, которая была осмеяна и названа «темной» Лейбницем и была подозрительной даже для самого Ньютона. Но через несколько декад — при отсутствии опровержений — его аксиомы дошли до того, что были признаны несомненно истинными. Подозрения были забыты, критики получили клеймо «эксцентрических», если не «обскурантов»; некоторые из его наиболее сомнительных допущений стали рассматриваться настолько тривиальными, что учебники даже никогда не упоминали их. Дебаты — от Канта до Пуанкаре — шли уже не об истинности ньютоновской теории, но о природе ее достоверности. (Этот поворотный пункт в оценке ньютоновской теории был впервые указан Карлом Поппером — см. его книгу, 1963, passim.)

Аналогия между политическими идеологиями и научными теориями идет гораздо дальше, чем обычно полагают: положительные теории, которые первоначально могли дебатироваться (и, может быть, принимаемы только под давлением), могут превращаться в бесспорные основы знания даже за время одного поколения: критики бывали забыты (и, может быть, даже казнены) до тех пор, пока революция не выдвигала снова их возражений.

[79] Это правило, по-видимому, впервые было выдвинуто Зейделем (Ph. L. Seidel, 1847, стр. 383).

[80] «Я имею право выдвинуть пример, удовлетворяющий условиям вашей аргументации, и я сильно подозреваю, что те примеры, которые вы называете странными и искусственными, в действительности будут затрудняющими вас примерами, предосудительными для вашей теоремы» (Дарбу, 1874).

[81] «Я приведен в ужас множеством неявных лемм. Придется затратить много труда, чтобы избавиться от них» (Дарбу, 1883).

можете легко применить правило 2.

г) Доказательство против анализа доказательства. Релятивизация понятий теоремы и строгости в анализе доказательства

Альфа. Что в вашем Правиле 2 вы подразумевали под термином «подходящая»?

Гамма. Это совершенно безразлично. Может быть добавлена **любая лемма**, которая отвергается рассматриваемым контрапримером: **любая** такая лемма восстановит силу анализа доказательства.

Ламбда. Что такое! Значит, лемма вроде— «Все многогранники имеют но крайней мере 17 ребер» — будет иметь отношение к цилиндру! И всякая другая случайная догадка ad hoc будет вполне пригодной, если только ее можно будет отвергнуть при помощи контрапримера.

Гамма. А почему нет?

Ламбда. Мы уже критиковали устранителей монстров и исключений за то, что они забывают о доказательствах[82]. А теперь вы делаете то же самое, изобретая настоящий монстр: **анализ доказательства без доказательства**! Единственная разница между вами и устранителем монстров состоит в том, что вы хотели бы заставить Дельту сделать явными свои произвольные определения и включить их в теорему в качестве **лемм**. И **нет** никакой разницы между устранением исключений и вашим анализированием доказательства. Единственным предохранителем против таких методов ad hoc будет употребление **подходящих** лемм, т. е. лемм, соответствующих духу мысленного эксперимента! Или вы хотите изгнать из математики доказательства и заменить их глупой формальной игрой?

Гамма. Лучше это, чем ваш «дух мысленного эксперимента»! Я защищаю объективность математики против вашего психологизма.

Альфа. Благодарю вас, Ламбда, вы снова поставили мой вопрос: новую лемму **не изобретают** с потолка, чтобы справиться с глобальным, но не локальным контрапримером; скорее, с усиленной тщательностью рассматривают доказательство и в нем **открывают** эту лемму. Поэтому я, дорогой Тета, не делал скрытых лемм и я, дорогой Каппа, не проводил их «контрабандой» в доказательство. Доказательство содержит все такие леммы, но зрелый математик понимает все доказательство уже по короткому очерку. Мы не должны смешивать **непогрешимое доказательство с неточным анализом доказательства**. Все еще существует неопровержимая главная теорема — «**Все многогранники, над которыми можно выполнить мысленный эксперимент**, или, короче, **все многогранники Коши будут эйлеровыми**». Мой приблизительный анализ доказательства провел пограничную линию для класса многогранников Коши карандашом, который — я допускаю — не был особенно острым. Теперь эксцентрические контрапримерьт учат нас острить наш карандаш. Но, во-первых, **ни один карандаш не является абсолютно острым** (и если мы переострим его, то он сломается), и, во-вторых, **затачивание карандаша не является творческой математикой**.

Гамма. Я сбился с толку. Какова же ваша позиция? Сначала вы были чемпионом по опровержениям.

Альфа. Ох, мне все больнее! Зрелая интуиция сметает в сторону споры.

Гамма. Ваша первая зрелая интуиция привела вас к «совершенному анализу доказательства». Вы думали, что ваш «карандаш» был абсолютно острым.

Альфа. Я забыл о трудностях лингвистических связей — особенно с педантами и скептиками. Но сердцем математики является мысленный эксперимент

[82] См. параграф 4,б и реплику Учителя.

— доказательство. Его лингвистическая артикуляция — анализ доказательства — необходима для сообщения, но не относится к делу. Я заинтересован в многогранниках, а вы в языке. Разве вы не видите бедности ваших контрапримеров? Они лингвистичны, но не многогранны.

Гамма. Тогда опровержение теоремы только выдает нашу неспособность понять ее скрытые леммы? Такая «теорема» будет бессмысленна, пока мы не поймем ее доказательства?

Альфа. Так как расплывчатость языка делает недостижимой **строгость анализа доказательства** и превращает образование теорем в бесконечный процесс, то зачем же беспокоиться о теореме? Работающие математики этого, конечно, не делают. Если будет приведен еще какой-нибудь незначительный контрапример, то они не допустят, чтобы их теорема была отвергнута, но самое большее, что «область ее применимости должна быть подходящим образом сужена».

Ламбда. Итак, вы не заинтересованы ни в контрапримерах, ни в анализе доказательства, ни во включении лемм?

Альфа. Это правда. Я отбрасываю все ваши правила. Вместо них я предлагаю только одно единственное: **стройте строгие (кристально ясные) доказательства**.

Ламбда. Вы придерживаетесь мнения, что **строгость анализа доказательства недостижима**. А достижима ли **строгость доказательства**? Разве «кристально ясные» мысленные эксперименты не могут привести к парадоксальным или даже противоречивым результатам?

Альфа. Язык расплывчат, но мысль может достичь абсолютной строгости.

Ламбда. Но ведь ясно, что «на каждой стадии эволюции наши отцы думали, что они достигли ее. Если они обманывали себя, то разве и мы также не плутуем сами с собой?»[83]

Альфа. «Сегодня достигнута абсолютная строгость»[84]. *(Смех в аудитории)*[85].

Гамма. Эта теория «кристально ясного» доказательства представляет чистый психологизм[86].

Альфа. Все же лучше, чем логико-лингвистический педантизм вашего анализа доказательства[87].

---

[83] Пуанкаре (1905, стр. 216).

[84] Там же, стр. 216. Изменения Критерия «строгости доказательства» производят в математике большие революции. Пифагорейцы считали, что строгие доказательства могут быть только арифметическими. Однако они открыли строгое доказательство, что √2 был «иррациональным». Когда этот скандал вышел наружу, то критерий был изменен: арифметическая интуиция была дискредитирована и ее место заняла геометрическая интуиция. Это означало большую и сложную реорганизацию математического знания (была введена теория пропорций). В восемнадцатом столетии «вводящие в заблуждение» чертежи испортили репутацию геометрических доказательств и девятнадцатый век увидел снова арифметическую интуицию, воцарившуюся при помощи сложной теории действительных чисел. Сегодня основные споры идут о том, что является или не является строгим в теоретико-множественных и математических доказательствах, как это видно из хорошо известной дискуссии о допустимости мысленных экспериментов Цермело и Гентцена.

[85] Как уже было указано, наш класс является очень передовым.

[86] Термин «психологизм» был создан Гуссерлем (1900). Раннюю «критику» психологизма см. у Фреге (Frege, 1893, стр. XV— XVI). Современные интуиционисты (не как Альфа) открыто принимают психологизм: «Математическая теорема выражает чисто эмпирический факт, а именно успех некоторого построения... математика есть изучение некоторых функций человеческого мозга» (Гейтинг (Heyting, 1956, стр. 8 и 10)]. Как они примиряют психологизм с достоверностью, представляет их хорошо охраняемый секрет.

[87] Что мы не смогли бы как следует выразить словами совершенное знание, даже если бы обладали им, было общим местом у древних скептиков [см. Секст Эмпирик (ок. 190), I, 83—87], но было забыто в век просвещения. Это было снова открыто интуиционистами: они приняли кантову философию математики, но указали, что «между совершенством собственно математики и

Ламбда. Отбросив бранные слова, я тоже являюсь скептиком в отношении вашего понимания математики как «существенно безъязычной деятельности ума»[88]. Каким образом деятельность может быть истинной или ложной? Только **членораздельная** мысль может питать истину. Доказательство может быть недостаточным: нам также надо установить, что доказывает доказательство. Доказательство представляет только одну стадию работы математика, за которой следует анализ доказательства и опровержения и которая заключается строгой теоремой. Мы должны **комбинировать** «строгость доказательства» со «строгостью анализа доказательства».

Альфа. Вы все еще надеетесь, что в конце дойдете до совершенно строгого анализа доказательства? Если так, то скажите мне, почему вы, «стимулированные» цилиндром, не начали с формулировки вашей новой теоремы? Вы только указали ее. Ее длина и сложность заставили бы нас смеяться от отчаяния. И это только после **первого** из ваших новых контрапримеров! Вы заменили нашу первоначальную теорему последовательностью все более точных теорем,— но только в **теории**. А как относительно **практики** этой релятивизации? Все более и более эксцентрические контрапримеры будут учитываться все более тривиальными леммами, давая «порочную бесконечность»[89] все более длинных и сложных теорем[90]. Если мы чувствовали животворность критики, когда она казалась приводящей к истине, то теперь, когда она вообще разрушает всякую истину и гонит нас бесконечно и бесцельно, она, конечно, будет разочаровывающей. Я останавливаю эту порочную бесконечность в **мысли**, но в **языке** вы никогда не остановите ее.

Гамма. Но я никогда не говорил, что здесь необходимо бесконечное множество контрапримеров. В некотором пункте мы можем дойти до истины и тогда поток опровержений прекратится. Но, конечно, мы не будем знать, когда это будет. Решающими являются только опровержения — доказательства же относятся к области психологии[91].

Ламбда. Я все-таки верю, что свет абсолютной достоверности вспыхнет, когда взорвутся опровержения!

Каппа. А взорвутся ли они? А что если Бог так создал многогранники, что все правильные общие их определения, формулированные человеческим языком, будут бесконечно длинными? Разве не будет богохульным антропоморфизмом предполагать, что (божеские) верные теоремы обладают конечной длиной?

Будьте откровенны; по той или другой причине нам всем надоели опровержения и складывание теорем по кусочкам. Почему бы нам не сказать «шабаш» и прекратить игру? Вы уже отказались от «Quod erat demonstrandum».

совершенством математического языка нельзя видеть ясной связи» [Броувер (Brouwer), 1952, стр. 140]. «Выражение при помощи сказанного или написанного слова — хотя и необходимо для сообщения — никогда не бывает адекватным. Задача науки заключается не в изучении языков, но в создании идей» (Heyting, 1939, стр. 74-75).

88 Brouwer (1952), стр. 141.

89 Английский язык имеет термин «infinite regress», но это будет только **частным** случаем порочной бесконечности (schlechte Unendlichkeit) и не будет здесь применимым. Альфа, очевидно, построил фразу, имея в мыслях «порочный круг».

90 Обычно, взяв альтернативную систему длинных определений, математики избегают длинных теорем, так что в теоремах появляются только определенные термины, например, «ординарный многогранник»; это будет более экономичным, так как одно определение сокращает много теорем. Даже и так определения занимают огромное место в «строгих» изложениях, хотя приводящие к ним монстры редко упоминаются. Определение «эйлерова многогранника» (с определениями некоторых определяющих терминов) занимает у Фордера (1927, стр. 67 и 29) около 25 строк; определение «ординарного многогранника» в издании 1962 г. «Encyclopedia Britannica» заполняет 45 строк.

91 «Логика заставляет нас отбросить некоторые аргументы, но она не может заставить нас верить любому аргументу» (Лебег, 1928, стр. 328).

Почему бы не отказаться также и от «Quod erat demonstratum*»? Ведь истина только для Бога.

Тета (в сторону). Религиозный скептик — худший враг науки!

Сигма. Не будем чрезмерно драматизировать! В конце концов дело идет лишь об узкой полутени неясности. Просто, как я сказал раньше, **не все предложения будут или истинными, или ложными**. Есть и третий класс, который я хотел бы теперь назвать **«более или менее строгими»**.

Тета (в сторону). Трехзначная логика — конец критического рационализма!

Сигма... и мы область их применимости определяем с более или менее адекватной строгостью.

Альфа. Адекватной чему?

Сигма. Адекватной решению задачи, которую мы хотим решить.

Тета (в сторону). Прагматизм! Разве уж все потеряли интерес к **истине**?

Каппа. Или адекватной Zeitgeist (Духу времени - *Пер.*)! «Довлеет дневи строгость его»[92] 83.

Тета. Историзм! *(Падает в обморок.)*

Альфа. Правила Ламбды для «**строгого анализа доказательства**» лишают математику ее красоты, дарят нам дотошный педантизм длинных, сложных теорем, наполняющих скучные толстые книги, и могут даже при случае посадить нас в порочную бесконечность. Каппа ищет выхода в условности, Сигма в математическом прагматизме. Какой выбор для рационалиста!

Гамма. Должен ли такой рационалист насладиться «**строгими доказательствами**» Альфы, его нечленораздельной интуицией, «скрытыми леммами», осмеянием принципа обратной передачи ложности и исключением опровержений? Должна ли математика не иметь никаких отношений с критицизмом и логикой?

Бета. Во всяком случае я устал от всей этой, не приводящей к решению, словесной грызни. Я хочу заниматься математикой и я не заинтересован философскими трудностями оправдания ее оснований. Даже если рассудок не в состоянии дать такое оправдание, то меня успокаивает мой природный инстинкт[93].

Я чувствую, что у Омеги есть интересная коллекция возможных доказательств — я лучше бы послушал их.

Омега. Но я помещу их в «философскую» оболочку!

Бета. Мне нет дела до упаковки, если внутри имеется что-нибудь.

Замечание.

В этом отделе я попытался показать, каким образом выступление математического критицизма было движущей силой в поисках «оснований» математики.

---

* Quod erat demonstrandum (лат.) — что требовалось доказать; Quod erat demonstratum (лат.) — что было доказано.— *Прим. пер.*

[92] Мур (E. H. Moore), 1902, стр. 411.

[93] «Природа уличает скептиков, рассудок уличает догматиков» [Паскаль, 1654. См. Oeuvres completes (Chevalier). Paris, 1954, стр. 1206—1207]. Немногие математики признаются, как Бета, что разум слишком слаб для оправдания самого себя. Большая часть их принимает некоторое клеймо догматизма, историзма или спутанного прагматизма и остается курьезно слепой к невозможности поддерживать это, например: «Математическое рассуждение проводится с такой скрупулезностью, которая делает его **бесспорным** и **убедительным** для каждого, кто только его поймет. ...Однако строгость математики не абсолютна: она развивается; **принципы математики не застыли раз навсегда**, а движутся и тоже могут служить и служат предметом научных споров» (А. Д. Александров, 1956, стр. 7). Эта цитата может напомнить нам, что диалектик пытается учитывать изменение, не пользуясь критицизмом; для него истины находятся «в непрерывном развитии», но всегда «полностью бесспорны».

Сделанное нами различие между **доказательством** и **анализом доказательства** и соответствующее различение **строгости доказательства** и **строгости анализа доказательства**, по-видимому, является решающим. Около 1800 г. **строгость доказательства** (кристально ясный мысленный эксперимент или конструкция) противопоставлялась путаной аргументации и индуктивному обобщению. Именно это подразумевал Эйлер под термином «rigida demonstratio», и на этом понятии была основана идея Канта о непогрешимой математике [см. его пример математического доказательства в книге (1781), стр. 716—717]. Точно так же думали, что человек доказывает то, что он вознамерился доказать. Никому не приходило в голову, что словесное выражение мысленного эксперимента сопряжено с какой-нибудь реальной трудностью. Аристотелева формальная логика и математика были двумя совершенно раздельными дисциплинами — математики считали первую совершенно бесполезной. Доказательство мысленного эксперимента имело полную убедительность без какой-нибудь формы «логической» структуры.

В начале XIX в. поток контрапримеров вызвал смущение. Так как доказательства были кристально ясными, то опровержения должны были быть занятными шалостями, должны быть полностью отделены от несомненных доказательств. Введенная **Коши революция строгости** базировалась на эвристическом нововведении, что математик не должен останавливаться на доказательстве: он должен пойти вперед и выяснить, что именно он доказал путем перечисления исключений, или, лучше, установления безопасной области, в пределах которой доказательство является справедливым. **Но Коши — или Абель — не видели какой-либо связи между обеими задачами. Им ни когда не приходило в голову, что если они открыли исключение, то им следовало бы еще раз обратить внимание на доказательство**. (Другие практиковали устранение или приспособление монстров, или даже «закрывали глаза» — но все соглашались, что доказательство представляет табу и не может иметь никакого дела с «исключениями».)

Происшедший в XIX в. союз логики и математики имел два основных источника: неевклидову геометрию и **вейерштрассову революцию строгости**. Этот союз привел к объединению доказательства (мысленного эксперимента) и опровержений и дал возможность развивать анализ **доказательства**, постепенно вводя дедуктивные формы в мысленный эксперимент доказательства. Эвристическим нововведением было то, что мы назвали «методом доказательства и опровержений»: **оно впервые соединило логику и математику**. Вейерштрассова строгость одержала победу над ее реакционными оппонентами с устранениями монстров и скрытыми леммами, которые пользовались лозунгами вроде «скуки от строгости», «искусственности против красоты» и т. д. **Строгость анализа доказательства стала выше строгости доказательства**, но большинство математиков мирилось с таким педантизмом лишь до тех пор, пока он обещал им полную достоверность.

Теория множеств Кантора, давшая еще одну жатву неожиданных опровержений «строго доказанных» теорем, обратила многих членов старой гвардии Вейерштрасса в догматиков, всегда готовых сражаться с «анархистами» при помощи устранения новых монстров или отыскания «скрытых лемм» в их теоремах, которые представляли последнее слово строгости, и в то же время карали «реакционеров» более старого типа за такие же грехи.

Затем некоторые математики поняли, что стремление к строгости анализа доказательства в методе доказательства и опровержений ведет к порочной бесконечности. Началась «интуиционистская» контрреволюция; разрушающий логико-лингвистический педантизм **анализа доказательства** был осужден и для

доказательства были изобретены новые экстремистские стандарты строгости, математика и логика были разведены еще раз.

Логики пытались снасти это супружество и провалились на парадоксах. Гильбертова строгость превратила математику в паутину **анализов доказательства** и потребовала остановки их бесконечных спусков путем кристально ясной совместимости **доказательств** с интуиционистской метатеорией. «Обосновательный слой», область не подлежащего критике предварительного знания (Uncriticisable familiarity), переместился в мысленные эксперименты математики. (См. Lakatos, 1962, стр. 179-184.)

При каждой «революции строгости» анализ доказательства проникал, все глубже в доказательства вплоть до «**обосновательного слоя**» (foundational layer) хорошо знакомого основного знания (familiar background knowledge)[*] , где верховно правила кристально ясная интуиция, строгость доказательства, а критика изгонялась. Таким образом, **различные уровни строгости отличаются только местом, где они проводят линию между строгостью анализа доказательства и строгостью доказательства, т. е. местом, где должен остановиться критицизм и должно начаться подтверждение**. «Достоверность» никогда не может быть достигнута, «основания» никогда не могут быть обоснованы, но «хитрость разума» превращает всякое увеличение строгости в увеличение содержания, в цель математики. Но эта история лежит вне пределов настоящего исследования.

6. Возвращение к критике доказательства при помощи контрапримеров, которые являются локальными, но не глобальными. Проблема содержания

а) Возрастание содержания при более глубоких доказательствах

Омега. Мне нравится у Ламбды его метод доказательства и опровержений и я разделяю его веру, что как-нибудь мы сможем окончательно дойти до строгого анализа доказательства и таким образом до достоверно истинной теоремы. Но даже и так сам наш метод создает новую задачу: **анализ доказательства при возрастании достоверности уменьшает содержание**. Каждая новая лемма в анализе доказательства, каждое соответствующее .новое условие в теореме уменьшают область ее применения. Возрастающая строгость применяется к уменьшающемуся числу многогранников. Разве включение лемм не повторяет ошибки, которую сделал Бета в игре на безопасность? Разве мы тоже не смогли бы «отступить слишком радикально, оставляя вне стен большое количество эйлеровых многогранников»?[94] В обоих случаях мы могли бы вместе с водой выплеснуть и: ребенка. **Мы должны иметь противовес против уменьшающего содержание давления строгости.**

Мы уже сделали несколько шагов в этом направлении. Позвольте мне напомнить вам о двух случаях и снова исследовать их.

Один случай мы имели, когда впервые натолкнулись на локальные, но не глобальные примеры[95]. Гамма опроверг третью лемму в нашем первом анализе доказательства (именно, что «при вынимании треугольников из плоской триангулированной сети мы встречаемся только с двумя возможностями: или мы вынимаем одно ребро, или же мы вынимаем два ребра и вершину»). Он вынул треугольник из середины сети, не вынимая ни одного ребра или вершины.

---

[*] См. сноску 73.- *Прим. пер.*

[94] См. реплику Учителя.

[95] Обсуждение этого случая см. в гл.3.

Мы имели тогда две возможности[96]. **Первая** состояла во включении ложной леммы в теорему. Это было бы совершенно правильной процедурой по отношению к достоверности, но так нехорошо уменьшило область применения нашей теоремы, что ее можно было бы применить только к тетраэдру. Вместе с контрапримерами мы выбросили бы и все наши примеры, кроме одного.

Поэтому мы разумно приняли вторую возможность: вместо **сужения** области теоремы вследствие включения леммы мы **расширили** ее, заменив лемму, сделанную ложной, другой, не являющейся таковой. Но этот существенный образец формирования теоремы был скоро забыт, и Ламбда не позаботился о том, чтобы сформулировать его в качестве эвристического правила. Оно было бы таким:

Правило 4. *Если вы имеете контрапример, являющийся локальным, но не глобальным, попробуйте исправить ваш анализ доказательства, заменив отвергнутую лемму неопровергнутой другой.*

Контрапримеры первого типа (локальные, но не глобальные) могут представить нам возможность **увеличивать** содержание нашей теоремы, которое постоянно **сокращается** под давлением контрапримеров третьего типа (глобальных, но не локальных).

Гамма. **Правило 4** снова выявляет слабость предложенной Альфой и теперь устраненной «анализирующей доказательства зрелой интуиции»[97]. Он составил бы список подозрительных лемм, непосредственно включил их и затем — не беспокоясь о контрапримерах — формулировал бы почти пустые теоремы.

Учитель. Омега, послушаем обещанный вами второй пример.

Омега. У Беты в анализе доказательства вторая лемма состояла в том, что все грани треугольны[98]. Это может быть опровергнуто известным числом локальных, но не глобальных контрапримеров, например при помощи куба или додекаэдра. Поэтому вы, сэр, заменили ее леммой, которая нами не опровергается, а именно, что «**любая грань, рассеченная диагональным ребром, распадается на два куска**». Но вместо того чтобы призвать **Правило 4**, вы порицали Бету за «невнимательный анализ доказательства». Вы согласитесь, что **Правило 4** будет лучшим советом, чем просто «будьте внимательнее».

Бета. Вы правы, Омега, и вы также заставляете меня лучше понимать «метод лучшего сорта устранителей исключений»[99]. Они начинают с осторожного, «безопасного» анализа доказательства и, систематически применяя **Правило 4**, постепенно строят теорему, не высказывая никаких ложных положений. В конце концов только от темперамента зависит, приближаться ли к истине сверху при помощи всегда неверных чрезмерных утверждений или же снизу при помощи всегда верных недостаточных утверждений.

Омега. Возможно, что это правильно. Но **Правило 4** можно толковать двумя способами. До сих пор мы рассматривали только первую более слабую интерпретацию: «можно **легко** обработать, улучшить доказательство, заменив неверную лемму **слегка измененной**, которую контрапример не может отвергнуть[100]; для этого нужно только «более внимательное» рассмотрение доказательства и «небольшое замечание»[101]. При этой интерпретации **Правило 4** будет просто заплаткой **в рамках первоначального доказательства**.

В качестве альтернативы я допускаю радикальную интерпретацию: заменить

---

96 Омега, по-видимому, забывает третью возможность: Гамма может о успехом требовать, что поскольку локальные, но не глобальные, контрапримеры не обнаруживают какого-нибудь нарушения принципа обратной передачи ложности, то нет надобности в каких-нибудь действиях.

97 См. параграф 5, г.

98 Обсуждение этого второго случая см. после реплики Беты.

99 См. там же.

100 См. главу 3.

101 См. там же.

лемму — или, может быть, все леммы — не только пытаясь выжать последнюю каплю содержания из данного доказательства, но, может быть, изобретая совершенно другое, более охватывающее, **более глубокое доказательство**.

Учитель. Например?

Омега. Я обсуждал ранее догадку Декарта — Эйлера с одним другом, который сразу же предложил следующее доказательство: вообразим, что многогранник полый и имеет поверхность, сделанную из какого-нибудь твердого материала, например картона. Ребра должны быть отчетливо раскрашены с внутренней стороны; хорошо осветим внутренность, и пусть одна из граней будет линзой обыкновенной камеры — та самая грань, из которой я могу снять фотографию, показывающую все ребра и вершины.

Сигма *(в сторону)*. Камера в математическом доказательстве?

Омега. Таким образом, я получаю изображение плоской сети, с которой можно проделать то же самое, что и с плоской сетью вашего доказательства. Таким же образом я могу показать, что для односвязных граней V — E + F = 1 и после добавления невидимой грани-линзы на фотографии я получаю формулу Эйлера. Основная лемма заключается в том, что у многогранника имеется такая грань, которая, будучи преобразована в линзу камеры, так фотографирует внутренность многогранника, что на пленке будут все ребра и вершины. Теперь я ввожу следующее сокращение: вместо «многогранника, имеющего одну грань, с которой можно сфотографировать **всю** внутренность», я буду говорить «квазивыпуклый многогранник».

Бета. Таким образом, ваша теорема будет: «Все квазивыпуклые многогранники с односвязными гранями являются эйлеровыми».

Омега. Для краткости и признания заслуги изобретателя этого частного доказательства я бы сказал: «**Все многогранники Жергонна будут эйлеровыми**»[102] .

Гамма. Но имеется множество простых многогранников, которые, будучи вполне эйлеровыми, имеют такие скверные выступы внутри, что у них нет грани, с которой можно было бы сфотографировать всю внутренность. Доказательство Жергонна не будет более глубоким, чем у Коши,— наоборот, доказательство Коши глубже жергоннова!

Омега. Конечно! Я полагаю, что Учитель знал о доказательстве Жергонна, обнаружил его неудовлетворительность при помощи какого-нибудь локального, но не глобального контрапримера, и заменил оптическую лемму — фотографирование — более общей топологической леммой — растягиванием. При этом он пришел к **более глубокому** доказательству Коши не путем «тщательного анализа доказательства», сопровождавшегося небольшим изменением, но в результате радикального нововведения, полученного воображением.

Учитель. Я принимаю ваш пример, но доказательства Жергонна я не знал. Но если вы знали, почему же нам о нем не сказали?

Омега. Потому что я непосредственно отверг его при помощи нежергонновых многогранников, которые были эйлеровыми.

---

[102] Доказательство Жергонна можно найти у Люилье (1812— 1813, стр. 177—179). В оригинале оно, конечно, не заключало никаких фотографических устройств. Оно гласило: «Возьмите многогранник с одной прозрачной гранью; представьте себе, что снаружи к этой грани приближается глаз настолько плотно, что может увидеть внутренние стороны всех других граней...» Жергонн скромно отмечает, что доказательство Коши является более глубоким, поскольку «оно имеет ценное преимущество, что совершенно не предполагает выпуклости» (однако ему не пришло в голову спросить, **что** же именно оно **предполагает**). Штейнер позднее снова открыл по существу то же самое доказательство (1826). Его внимание обратили на приоритет Жергонна; тогда он прочел работу Люилье со списком исключений, но это не помешало ему закончить свое доказательство такой «теоремой»: «**Все многогранники являются эйлеровыми**». Именно эта работа Штейнера заставила Гесселя — немецкого Люилье — написать свою работу (1832).

Гамма. Как я только что сказал, я тоже нашел такие многогранники. Но будет ли это доводом для совершенного уничтожения этого доказательства?

Омега. Думаю, что да.

Учитель. А вы не слышали о доказательстве Лежандра? Вы и его захотите уничтожить?

Омега. Я, конечно, уничтожил бы. Оно еще менее удовлетворительно; его содержание еще беднее, чем доказательство Жергонна. Его мысленный эксперимент начинался с картографирования многогранника при помощи центральной проекции на сферу, содержавшую этот многогранник. Радиус сферы он выбирал равным 1. Он выбрал центр проекции так, чтобы сфера была полностью один и только один раз покрыта сетью сферических многоугольников. Таким образом, первой его леммой было, что такая точка существует. Второй его леммой было, что для сети на сфере, полученной из многогранника, будет V — E + F = 2; это он нашел при помощи тривиально истинных лемм сферической тригонометрии. Точка, из которой возможна такая центральная проекция, существует только для выпуклых и немногих приличных, «почти выпуклых» многогранников — класс еще более узкий, чем «квазивыпуклых» многогранников. Но теорема - «**Все многогранники Лежандра являются эйлеровыми**»[103] — полностью отличается от теоремы Коши, но только к худшему. Она, «к несчастью, неполна»[104]. Она представляет «пустое усилие, предполагающее условия, от которых теорема Эйлера совершенно не зависит. Она должна быть уничтожена и нужно поискать более общих принципов»[105].

Бета. Омега прав. «Выпуклость в известной степени для эйлеровости является акцидентальной. Выпуклый многогранник может быть, например, при помощи выступа или вталкивания во внутрь одной или нескольких вершин, преобразован в невыпуклый многогранник с теми же самыми конфигурационными числами. Соотношение Эйлера соответствует чему-то более фундаментальному, чем выпуклость»[106]. И вы никогда не поймаете это вашими «почти» или «квази» пустяками.

[103] Доказательство Лежандра можно найти в его работе (1794), но там нет теоремы, порожденной доказательством, так как анализ доказательства и образование теорем были в XVIII в. по существу неизвестны. Лежандр сначала определяет многогранники как твердые тела, поверхность которых состоит из многоугольных граней (стр. 161). Затем он доказывает, что V—E+F=2 вообще (стр. 228). Но здесь имеется устраняющая исключения поправка в примечании курсивом на стр. 164, гласящая, что будут рассматриваться только выпуклые многогранники. Он игнорировал почти выпуклое обрамление. Пуансо первый, комментируя доказательство Лежандра, заметил в своей работе (1809), что формула Эйлера справедлива не только для обыкновенных выпуклых тел, а именно, поверхность которых пересекается прямой линией не более чем в двух точках; она справедлива также для многогранников с входящими углами в предположении, что внутри тела можно найти точку, служащую центром сферы, на которую прямыми линиями, идущими из центра, можно спроектировать грани многогранника так, чтобы их проекции не перекрывали друг друга. Это применимо к бесконечному множеству многогранников с входящими углами. Действительно, при этом положении доказательство Лежандра применимо ко всем таким добавочным многогранникам.

[104] Жонкьер продолжает, снова заимствуя аргумент у Пуансо (1858): «Призывая Лежандра и подобные высокие авторитеты, только способствуешь широко распространенному предубеждению, которое пленило даже некоторые из наилучших интеллектов, а именно, что область применимости теоремы Эйлера ограничена только выпуклыми многогранниками» (1890a, стр. 111).

[105] Это из Пуансо (1858, стр. 70).

[106] Зоммервилъ (D. M. У. Sommerville), 1929, стр. 143—144.

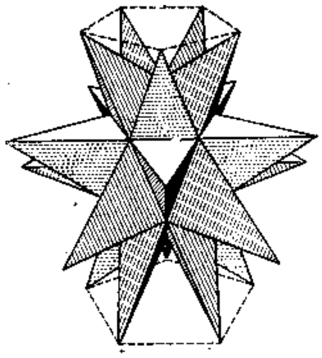


Рис. 15.

Омега. Я думал, что учитель нашел это в топологических принципах доказательства Коши, в котором все леммы Лежандрова доказательства заменены совершенно новыми. Но тогда я натолкнулся на многогранник, отвергший даже это доказательство, которое наверняка является самым глубоким из всех до него.

Учитель. Послушаем.

Омега. Вы все помните «морского ежа» Гаммы (рис. 7). Он, конечно, не был эйлеровым. Но не все звездчатые многогранники будут неэйлеровыми. Возьмите, например, «большой звездчатый додекаэдр» (рис. 15). Он состоит из пентаграмм, но только иначе расположенных. Он имеет 12 граней, 30 ребер и 20 вершин, так что V — E + F = 2[107].

Учитель. Значит, вы отбрасываете наше доказательство?

Омега. Да. Удовлетворительное доказательство должно объяснить также и эйлеровость «большого звездчатого додекаэдра».

Ро. А почему не допустить, что «большой звездчатый додекаэдр» состоит из треугольников? Ваши затруднения мнимы.

Дельта. Я соглашаюсь. Но они будут мнимыми по другой причине. Я теперь занялся звездчатыми многогранниками; они так увлекательны. Но я боюсь, что они существенно отличаются от обычных многогранников; поэтому возможно, что нельзя придумать доказательство, которое одной единственной идеей объяснило бы эйлеров характер, скажем, куба и **также** «большого звездчатого додекаэдра».

Омега. Почему же нет? У вас нет воображения. Стали бы вы настаивать после доказательства Жергонна и до Коши, что выпуклые и вогнутые многогранники будут существенно различными? Поэтому возможно, что нельзя придумать доказательства, которое одной единственной идеей объяснило бы Эйлеров характер выпуклых и вогнутых многогранников. Позвольте мне привести место из «Диалогов» Галилея.

> «***Сагредо.*** Как вы видите, все планеты и спутники — назовем всех их «планетами» — движутся по эллипсам.
>
> ***Сальвиати.*** Я боюсь, что существуют планеты, движущиеся по параболам. Посмотрите на этот камень. Я бросаю его; он движется по параболе.
>
> ***Симпличио***. Но этот камень не планета! Это два совершенно различных явления!
>
> ***Сальвиати***. Конечно, этот камень будет планетой, только брошенной менее могущественной рукой, чем та, которая бросила Луну.
>
> ***Симпличио***. Глупости! Как вы можете соединять вместе небесные и земные явления? Одно не имеет ничего общего с другим! Конечно, оба

[107] Этот «большой звездчатый додекаэдр» уже был придуман Кеплером (1619, стр. 58), затем независимо от него Пуансо (1809), который испытывал его на эйлеровость. Рисунок 15 скопирован с книги Кеплера.

явления могут быть объяснены доказательствами, но я, конечно, ожидаю, что оба объяснения будут совершенно различными! Я не могу вообразить доказательства, которое при помощи одной единственной идеи объяснило движение планеты в небе и ядра на Земле!

Сальвиати. Вы не можете вообразить его, а я могу придумать его»[108].

Учитель. Бросим ядра и планеты. Омега, удалось ли вам найти доказательство, которое охватило бы вместе обычные эйлеровы многогранники и эйлеровы звездчатые многогранники?

Омега. Я не нашел. Но я его найду[109].

Ламбда. Скажите, в чем же дело с доказательством Коши? Вы должны объяснить, почему отвергаете одно доказательство за другим.

б) Стремление к окончательным доказательствам и соответствующим необходимым и достаточным условиям

Омега. Вы критиковали анализы доказательства за крушение обратной передачи ложности при помощи контрапримеров третьего типа. Теперь я критикую их за крушение **передачи** ложности (или, что то же самое, **обратной передачи истины**) при помощи контрапримеров второго типа. Доказательство должно объяснить явление эйлеровостн в полном его объеме.

Мои поиски имеют целью не только верность, но также и **окончательность**. Теорема должна быть верной — не должно быть никаких контрапримеров внутри ее области; но она также должна быть **окончательной**; не должно быть никаких контрапримеров **вне** ее области. Я хочу провести граничную линию между примерами и контрапримерами, а совсем не между, с одной стороны, безопасной областью с небольшим числом примеров, а, с другой стороны, с мешком, содержащим смесь примеров и контрапримеров.

Ламбда. Итак, вы хотите, чтобы условия теоремы были не только достаточными, но также и необходимыми!

Каппа. Вообразим в целях доказательства, что вы нашли такую магистральную теорему. «**Все магистральные многогранники будут эйлеровыми**». Понимаете ли вы, что эта теорема будет «окончательной» только в том случае, если будет верной обратная теорема: «**Все эйлеровы многогранники будут магистральными многогранниками**»?

Омега. Конечно.

Каппа. Значит ли это, что если в порочной бесконечности потеряется верность, то будет потеряна также и окончательность? Вы должны находить по крайней мере по одному эйлерову многограннику вне области каждого из ваших все более глубоких доказательств.

Омега. Конечно, я знаю, что не могу решить проблему окончательности, не решив проблемы верности. Я уверен, что мы решим обе. Мы остановим бесконечный поток контрапримеров как первого, так и третьего типа.

Учитель. Ваши поиски увеличивающегося содержания очень важны. Но почему не признать ваш второй критерий удовлетворительности — окончательность — лишь **желательным, но не обязательным**? Почему отвергать интересные доказательства, не содержащие сразу достаточных и необходимых условий? Почему рассматривать их как опровергнутые?

---

[108] Я не был в состоянии определить, откуда взята эта цитата. (Это — шутливое подражание Галилею.— *Прим. пер.*)

[109] См. примечание 111.

Омега. Ну...[110]

Ламбда. Во всяком случае Омега вполне убедил меня, что единственное доказательство может быть недостаточным для критического улучшения наивной догадки. Наш метод должен заключать радикальную формулировку **Правила 4**, и тогда он должен быть назван методом «**доказательств и опровержений**» вместо «**доказательства и опровержений**».

Мю. Извините мое вмешательство. Результаты вашей дискуссии я как раз перевел в квазитопологические термины. Метод включения лемм дал сужающуюся последовательность найденных **областей постепенно исправляемых теорем**: в процессе появления скрытых лемм эти области сокращались под непрерывной атакой глобальных контрапримеров и стремились к некоторому **пределу**; назовем этот предел «**областью анализа доказательств**». Если мы применяем более слабую формулировку Правила 4, то эта область может быть расширена под продолжающимся давлением локальных контрапримеров. Эта расширяющаяся последовательность будет тоже иметь предел; я назову его «**областью доказательства**». Дискуссия показала, что даже и эта область может быть очень узкой (возможно, даже пустой). Нам придется придумывать более **глубокие доказательства**, области которых составят **расширяющуюся последовательность**, включающую все более и более упорствующие эйлеровы многогранники, бывшие локальными контрапримерами для предшествующих доказательств. Эти области, являющиеся и сами предельными областями, будут сходиться к двойному пределу— «**области наивной догадки**», — которая является целью исследования.

Топология этого эвристического пространства является проблемой математической философии: если последовательности бесконечны, то будут ли они вообще сходиться, стремиться к пределу, может ли предел быть пустым множеством?

Эпсилон. Я нашел более глубокое доказательство, чем у Коши, которое объясняет также эйлеровость «большого звездчатого додекаэдра»! *(Передает записку Учителю.)*

Омега. Окончательное доказательство! Теперь будет раскрыта истинная сущность эйлеровсти!

Учитель. Я очень жалею, но время истекает: мы обсудим крайне утонченное доказательство Эпсилона как-нибудь в другое время[111]. Все, что я вижу, сводится к тому, что оно не будет окончательным в смысле Омеги. Не правда ли, Бета?

в) Различные доказательства дают различные теоремы

Бета. Наиболее интересная вещь, которую я уяснил из этой дискуссии, заключается в том, что различные доказательства той же самой наивной догадки приводят к различным теоремам. **Единственная догадка Декарта — Эйлера**

---

[110] Ответ заключается в знаменитой папповой эвристике античности, которая применялась только к нахождению «финальных», «окончательных» истин, т. е. к теоремам, которые содержали сразу и необходимые и достаточные условия. Для «задач на доказательство» основное правило эвристики было: «Если у вас есть догадка, то выведите из нее следствия. Если вы придете к следствию, о котором известно, что оно ложно, то догадка была ложной. Если вы придете к следствию, о котором известно, что оно истинно, то обратите порядок доказательств и, если догадка может быть таким образом выведена из истинных следствий, то она была истинной» (ср. Heath, 1925, 1, стр. 138—139). Принцип «causa aequat effectu» (причина равна следствию.— *Прим. пер.*) и поиски теорем с необходимыми и достаточными условиями заключались в этой традиции. Только в семнадцатом веке, когда все усилия применить паппову эвристику к новой науке оказались тщетными, поиски верности получили верх над поисками окончательности.

[111] Это доказательство принадлежит Пуанкаре [см. его работы (1893) и (1899)].

исправляется каждым доказательством в отдельную теорему. Наше первоначальное доказательство дало: «Все многогранники Коши суть эйлеровы». Теперь мы узнали кое-что о двух совершенно различных теоремах: «**Все многогранники Жергонна суть эйлеровы**» и «**Все многогранники Лежандра суть эйлеровы**». Три доказательства и три теоремы с одним общим предком[112]. Обычное выражение «различные доказательства теоремы Эйлера» будет тогда не совсем правильным, так как оно скрывает жизненную роль доказательства в образовании теорем[113] .

Пи. Разница между различными доказательствами лежит гораздо глубже. Только наивная догадка относится к многогранникам. Теоремы касаются соответственно объектов Коши, жергонновых и лежандровых, - но никоим образом не многогранников.

Бета. Вы пытаетесь шутить?

Пи. Нет, я объясню мою точку зрения. Но я сделаю это в более широком контексте — я хочу обсудить вообще **формирование понятий**.

Дзета. Лучше бы сначала обсудить **содержание**. Я нахожу **Правило 4** Омеги очень слабым — даже в его радикальной формулировке[114].

Учитель. Правильно. Давайте послушаем сначала о том, как Дзета подходит к проблеме содержания, а затем откроем наши дебаты дискуссией об образовании понятий.

---

112 Есть много других доказательств догадки Эйлера. Детальный эвристический разбор доказательств Эйлера, Жордана и Пуанкаре см. Lacatos (1961).

113 Пуансо, Люильe, Коши, Штейнер, Крелле все думали, что различные доказательства доказывают одну и ту же теорему — «теорему Эйлера». Процитируем характерную фразу из стандартного учебника: «Эта теорема восходит к Эйлеру, первое доказательство дано Лежандром, второе Коши» (Крелле, 1827, **II**, стр. 671).

Пуансо очень близко подошел к тому, чтобы заметить эту разницу, когда сказал, что лежандрово доказательство применимо не только к обыкновенным выпуклым многогранникам. (см. примечание 103). Но когда он затем сравнил доказательство Лежандра с эйлеровым (тем, которое основано на обрезании пирамидальных углов многогранника так, что в окончательном результате получается тетраэдр с неизменившейся эйлеровой характеристикой) (1751), то он отдал предпочтение лежандрову на основании «простоты». Эта «простота» стоит здесь в согласии с идеей XVIII в. о строгости: ясность в мысленном эксперименте. Ему не пришло в голову сравнить оба доказательства по **содержанию**; тогда эйлерово доказательство оказалось бы более высоким. (По существу в доказательстве Эйлера нет никаких неправильностей. Лежандр применил субъективный стандарт современной ему строгости и пренебрег объективным стандартом содержания.)

Люилье в скрытой критике этого места (он не упоминает Пуансо) указывает, что простота Лежандра является только «кажущейся», потому что она предполагает довольно большое предварительное знание сферической тригонометрии (1812—1813, стр. 171). Но Люилье тоже верит, что Лежандр «**доказал ту же теорему**», что и Эйлер (там же, стр. 170).

Штейнер присоединяется к нему в оценке доказательства Лежандра и в мнении, что все доказательства доказывают ту же теорему (1826). Единственная разница заключается в том, что, по Штейнеру, все различные доказательства доказывают, что «**все многогранники будут эйлеровыми**», по Люилье же, все различные доказательства доказывают, что «**все многогранники, не имеющие туннелей, пустот и кольцевидных граней, будут эйлеровыми**».

Коши написал свою работу (1811) о многогранниках, когда ему еще было чуть больше двадцати лет, задолго до его революции строгости, и нельзя упрекать его, что он во введении ко второй части своего трактата повторяет принадлежащее Пуансо сравнение доказательств Эйлера и Лежандра. Он — как и большинство его современников — не понял различия в глубине разных доказательств и не мог оценить действительную силу своего собственного доказательства. Он думал, что дал только **еще одно доказательство той же самой теоремы**, но с готовностью подчеркивал, что просто получил тривиальное обобщение формулы Эйлера для некоторых групп многогранников.

Жергонн был первым, кто оценил несравненную глубину доказательства Коши (Люилье, 1812—1813, стр. 179).

114 См. реплику Омеги и реплику Мю.

7. Проблема пересмотра содержания

а) «Наивность» наивной догадки

Дзета. Я согласен с Омегой и также оплакиваю факт, что устранители монстров, исключений и инкорпораторы лемм все стремятся к некоторой истине за счет содержания. Но его **Правило 4** [115], требующее более глубоких доказательств той же самой наивной догадки, не будет достаточным. Почему наши поиски содержания должны быть ограничены первой наивной догадкой, на которую мы напали? Почему целью нашего исследования должна быть «область наивной догадки»?

Омега. Я не понимаю вас. Конечно, нашей задачей было найти область истинности отношения V—E+F=2?

Дзета. Нет! Нашей задачей было найти связь V, E и F для любого многогранника. Ведь только по чистой случайности мы сначала познакомились с многогранниками, для которых F—E+F=2. Но критическое исследование этих «эйлеровых» многогранников показало нам, что неэйлеровых многогранников существует гораздо больше, чем эйлеровых. Почему же нам не обратить внимания на область истинности V—E+F= -6, V—E+F=28 или V—E+F=0? Разве они не так же интересны?

Сигма. Вы правы. Мы обратили так много внимания на V—E+F=2 только по той причине, что первоначально считали это истинным. Теперь же мы знаем, что это не так,— нам нужно найти **новую, более глубокую наивную догадку**...

Дзета ..., которая будет менее наивной...

Сигма ..., которая даст соотношение между V, E и F для **любого** многогранника.

Омега. Зачем спешить? Решим сначала более скромную задачу, которую мы поставили перед собой: объяснить, почему некоторые многогранники являются эйлеровыми. До сих пор мы пришли только к частичным объяснениям. Например, ни одно из найденных доказательств не объяснило, почему картинная рама с кольцеобразными гранями спереди и сзади будет эйлеровой (рис. 16). Она имеет 16 вершин, 24 ребра и 10 граней...

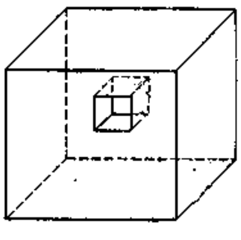


Рис. 16

Тета. Она, конечно, не будет многогранником Коши: у нее есть туннель, кольцеобразные грани...

Бета. И все-таки она эйлерова! Как неразумно! Если многогранник провинился один раз — туннель без кольцеобразных граней (рис. 9), — то его отбрасывают к козлищам, а тот, который сделал вдвое больше преступлений — имеет кольцеобразные грани (рис. 16), — допущен к овцам[116].

---

[115] См. реплику Омеги.

[116] Эта задача, была отмечена Люилье (1812—1813, стр. 189) и независимо от него Гесселем (1832). В статье Гесселя рисунки обеих картинных рам помещены рядом. См. также подстрочное примечание 134.

Омега. Вы видите, Дзета, у нас достаточно загадок и для эйлеровых многогранников. Решим же их, прежде чем заняться более общей задачей.

Дзета. Нет, Омега. «На много вопросов иногда бывает легче ответить, чем только на один. Новая более претенциозная проблема может оказаться более легкой, чем первоначальная»[117] 108. В самом деле, я покажу, что ваша узкая случайная задача может быть решена только после решения более широкой, существенной.

Омега. Но я хочу раскрыть секрет эйлеровости!

Дзета. Я понимаю ваше упорство: вы поставили задачу определить, где Бог поместил твердь, отделяющую эйлеровы многогранники от неэйлеровых. Но нет основания думать, что слово «эйлеров» вообще встречалось у Бога в плане вселенной. А что если эйлеровость только случайное свойство некоторых многогранников? В этом случае будет неинтересно, или даже невозможно, найти случайные зигзаги в демаркационной линии между эйлеровыми и неэйлеровыми многогранниками. Тем более это допущение оставит незапятнанным рационализм, потому что эйлеровость не будет тогда частью рационального плана вселенной. Поэтому забудем об этом. Один из основных пунктов критического рационализма заключается в том, что надо быть всегда готовым во время решения оставить свою первоначальную задачу и заменить ее другой.

б) Индукция как основа метода доказательств и опровержений

Сигма. Дзета прав. Какое несчастье!

Дзета. Несчастье?

Сигма. Да. Вы теперь хотите ввести новую «наивную догадку» о соотношении между V, E и F для любого многогранника, не правда ли? Невозможно! Взгляните на большую толпу контрапримеров. Многогранники с полостями, многогранники с кольцеобразными гранями, с туннелями, сросшиеся друг с другом в ребрах, в вершинах... V—E+F может принять вообще любое значение. Вы, пожалуй, не сумеете разглядеть в этом хаосе какой-нибудь порядок! Твердую почву эйлеровых многогранников мы покинули для болота! Мы невозвратно потеряли наивную догадку и не имеем надежды получить другую!

Дзета. Но...

Бета. А почему нет? Вспомните кажущийся безнадежным хаос в нашей таблице чисел вершин, ребер и граней даже у самых обыкновенных многогранников.

	Многогранники	F	V	E
1.	Куб	6	8	12
2.	Треугольная призма	5	6	9
3.	Пятиугольная призма	7	10	15
4.	Четырехугольная пирамида	5	5	8
5.	Треугольная пирамида	4	4	6
6.	Пятиугольная пирамида	6	6	10
7	Октаэдр	8	8	1

[117] Полья называет это «парадоксом изобретателя» (1945, стр. 110).

.				2
8.	«Башня»	9	9	16
9.	Усеченный куб	7	10	15

Мы столько раз не могли .подобрать для них формулу[118].Но потом внезапно нас поразил настоящий закон, управляющий ими:

V-E+F = 2.

Каппа (в сторону). «Настоящий закон»? Странное название для полнейшей ложности.

Бета. Все, что мы должны теперь сделать, это дополнить нашу таблицу новыми данными для неэйлеровых многогранников и поискать новую формулу: при наличии терпеливого прилежного наблюдения и некоторого счастья мы попадем на правильную формулу; затем мы можем снова ее улучшить, применяя метод доказательств и опровержений!

Дзета. Терпеливое, прилежное наблюдение? Пробовать одну формулу за другой? Может быть, вы придумаете гадательную машину, которая будет давать вам случайные формулы и пробовать их на вашей таблице? Неужели вы так думаете о прогрессе науки?

Бета. Не понимаю вашего гнева. Ведь вы, конечно, согласитесь, что начало нашего знания, наши наивные догадки могут прийти только после прилежного наблюдения и внезапного прозрения, как бы много ни взял на себя наш критический метод «доказательств и опровержений», после того как мы **найдем** наивную догадку? Любой дедуктивный метод должен начинаться с индуктивного основания!

Сигма. Ваш индуктивный метод никогда не принесет удачи. Мы пришли к F-E + F=2 только потому, что в нашей первоначальной таблице не было ни картинной рамы, ни морского ежа. Теперь же, когда этот исторический инцидент...

Каппа (в сторону) ... или благосклонное божественное руководство...

Сигма... более уже не существует, вы никогда не сможете из хаоса «индуцировать» порядок. Мы начали с долгого наблюдения и со счастливым прозрением — и потерпели поражение. Теперь вы предлагаете начать снова с еще более долгим наблюдением и с более счастливым прозрением. Даже если бы мы пришли к какой-нибудь новой наивной догадке — в чем я сомневаюсь — мы кончили бы только такой же путаницей.

Бета. Может быть, вы хотите совсем отказаться от исследования? Нам **нужно** начать снова — прежде всего с некоторой новой наивной догадки, а затем снова пройти через метод доказательств и опровержений.

Дзета. Нет, Бета. Я согласен с Сигмой, поэтому и не начну опять с новой наивной догадки.

Бета. Тогда с чего же вы хотите **начать**, если не с индуктивного обобщения на низшем уровне в качестве наивной догадки? Или у вас есть какой-нибудь другой метод для начала?

в) Дедуктивная догадка против наивной догадки

Дзета. Начинать? Зачем я должен **начинать**? Мой ум не пуст, когда я открываю (или изобретаю) задачу.

---

[118] См. примечание 123. Эта таблица заимствована у Полья (1954, т. I, стр. 36).

Учитель. Не дразните Бету. Вот задача: **имеется ли соотношение между числами вершин, ребер и граней многогранника, аналогичное тривиальному соотношению между числами вершин и сторон многоугольника V=E** ? [119] Как вы приметесь за эту задачу?

Дзета. Прежде всего я не имею стипендии от правительства для производства подробной описи многогранников, а также не обладаю армией ассистентов для подсчета их вершин, ребер и граней и составления таблиц по этим данным. Но если бы даже все это у меня было, я не имел бы терпения — или интереса — испытывать пригодность одной формулы за другой.

Бета. Что же тогда? Вы ляжете на диван, закроете глаза и забудете о данных?

Дзета. Так точно я и сделаю. Чтобы начать, мне нужна идея, а не какие-либо данные.

Бета. А откуда вы возьмете идею?

Дзета. Она уже имеется в нашем уме, когда мы формулируем задачу; фактически она имеется уже в самой формулировке задачи.

Бета. Какая же идея?

Дзета. Та, что для многоугольника V=E.

Бета. Ну так что же?

Дзета. Задача никогда не приходит с неба. Она всегда связана с нашим земным знанием. Мы знаем, что для многоугольников V = E. Теперь многоугольник есть система многоугольников, состоящая из одного единственного многоугольника. Многогранник есть система многоугольников, состоящих более чем из одного многоугольника. Но для многогранников V≠E. В каком пункте отношение V=E отказалось служить при переходе от монополигональных систем к полиполигональным? Вместо того чтобы собирать данные, я прослежу, как эта задача возникла на основе нашего земного знания, или каковы были ожидания, опровержение которых представило эту задачу.

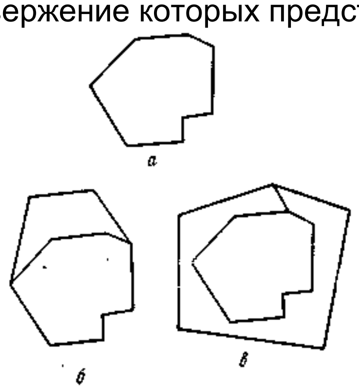


Рис. 17

Сигма. Правильно. Последуем вашим рекомендациям. Для всякого многоугольника E—V = 0 (рис. 17, а). Что случится, если я прикреплю к нему другой многоугольник (необязательно в той же плоскости)? Добавляемый многоугольник имеет n_1 сторон и n_1 вершин; если мы прикрепим его к первоначальному по цепочке из n_1' ребер и $n_1'+1$ вершин, то мы увеличим число ребер на $n_1— n_1'$, а число вершин на $n_1— (n_1' + 1)$; значит, в новой 2-полигональной системе получится избыток в числе ребер над числом вершин: E — V = 1 (рис. 17,6); необычное, но совершенно допустимое прикрепление мы видим на рис. 17, в. «Прикрепление» новой грани к системе будет всегда увеличивать этот избыток на единицу; следовательно, для построенной таким образом F-полигональной системы будет всегда E—V=F—1.

---

[119] См. главу 1.

Бета. Или $V - E + F = 1$.

Ламбда. Но ведь это неверно для большей части полигональных систем. Возьмите куб...

Сигма. Но мое построение может привести только к «открытым» полигональным системам — ограниченным цепочкой ребер. Мой мысленный эксперимент я могу легко распространить на «закрытую» полигональную систему без такой границы. Это закрытие может быть произведено, если мы такую сосудообразную систему покроем многоугольником — крышкой; прикрепление такого покрывающего многоугольника увеличит F на единицу без изменения V или E...

Дзета. Итак, для закрытой полигональной системы — и закрытого многогранника,— построенной таким образом, $V - E + F = 2$; догадка, которую мы теперь получили без «наблюдения» числа вершин, ребер и граней одного многогранника!

Ламбда. И теперь вы можете применить метод доказательств и опровержений без какой-нибудь «индуктивной отправной точки».

Дзета. С той разницей, что вам уже не надо будет выдумывать доказательство — оно уже получилось готовым. Вы можете продолжать непосредственно с опровержениями, анализом доказательства, образованием теоремы.

Ламбда. Тогда в вашем методе — вместо наблюдений— доказательство предшествует наивной догадке[120].

Дзета. Ну, я не назвал бы «наивным» предположение, которое выросло из доказательства. В моем методе нет места для индуктивных наивностей.

Бета. Есть возражение! Вы только отодвинули назад наивное индуктивное начало: вы же начали с «$V = E$ для многоугольников». Разве вы не основываете это на наблюдениях?

Дзета. Как большинство математиков, я не умею считать. Я только что попытался сосчитать стороны и вершины у семиугольника; сначала я нашел 7 сторон и 8 вершин, а затем, второй раз, 8 сторон и 7 вершин...

Бета. Шутки в сторону, как вы **получили** $V = E$?

Дзета. Я был глубоко потрясен, когда впервые понял, что для треугольника $V - E = 0$. Я, конечно, хорошо знал, что для одного ребра $V - E = 1$ (рис. 18,а). Я знал также, что присоединение новых ребер всегда увеличивает на единицу и число ребер и число вершин (рис. 18,б и 18,в). Почему же тогда в полигональных системах ребер будет $V - E = 0$? Потом я понял, что это получается вследствие перехода от открытой системы ребер (которая ограничивается двумя вершинами) к закрытой системе ребер (которая не имеет такой границы), так как мы «закрываем» открытую систему, вставляя ребро без добавления новой вершины. Таким образом, я доказал, но не наблюдал, что для многоугольников будет $V - E = 0$.

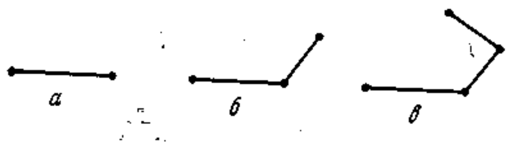


Рис. 18

Рис. 19

Бета. Ваша хитрость не поможет вам. Вы только еще дальше отодвинули назад индуктивную отправную точку; теперь обратимся к утверждению, что для всякого ребра $V - E = 1$. Вы это доказали или **наблюдали**?

Дзета. Я доказал это. Я, конечно, знал, что для одной вершины $V = 1$ (рис.

[120] Это важное уточнение для примечания 17.

19). Моей задачей было построить аналогичное соотношение...

Бета (яростно). Разве вы не **наблюдали**, что для точки V=1?

Дзета. А вы наблюдали это? *(В сторону, к Пи.)* Должен ли я сказать ему, что моей «индуктивной отправной точкой» было пустое пространство? Что я начал с того, что «наблюдал» **ничто**?

Ламбда. Во всяком случае два пункта мы установили. Сначала Сигма аргументировал, что только **благодаря исторической случайности можно прийти к наивной индуктивной догадке**; если имеешь перед собой реальный хаос фактов, то вряд ли сможешь подвести их под изящную формулу. Затем Дзета показал, что **для логики доказательств и опровержений мы совсем не нуждаемся ни в наивной догадке, ни в индуктивистской отправной точке**.

Бета. Возражение! А как быть с теми прославленными наивными догадками, которым **не** предшествовали (или даже за которыми не следовали) доказательства, вроде догадки о четырех цветах, которая говорит, что четырех цветов вполне достаточно для того, чтобы раскрасить любую карту, или догадки Гольдбаха? Ведь только благодаря историческим случайностям доказательства могут предшествовать теоремам, или может иметь место «дедуктивная догадка» Дзеты; в других случаях первыми бывают наивные индуктивные догадки.

Учитель. Мы, конечно, должны усвоить **оба** эвристических образца; **дедуктивная догадка** является самой лучшей, но **наивная догадка** лучше, чем отсутствие всякой догадки. Но **наивная догадка - не индукция; такие вещи, как индуктивные догадки, не существуют**!

Бета. Но ведь мы нашли наивную догадку при помощи **индукции**! «Это значит, что она была внушена наблюдением, указана особыми событиями... И среди частных случаев, которые мы рассмотрели, мы могли различить две группы: те, которые предшествовали формулировке догадки, и те, которые появились потом. Первые **подсказали** догадку, вторые **поддержали** ее. Оба ряда случаев произвели некоторого рода контакт между догадкой и «фактами»...[121] Этот двойной контакт и представляет сердце индукции; первый создает **индуктивную эвристику**, второй дает индуктивное оправдание, или **индуктивную логику**.

Учитель. Нет! Факты не подсказывают догадок и тем более не поддерживают их!

Бета. Тогда что же подсказало **мне** F—E+F=2, если не факты, собранные в моей таблице?

Учитель. Я скажу вам. Вам самим несколько раз не удавалось подвести их под формулу[122] . Произошло следующее: у вас были три или четыре догадки, которые по очереди были быстро отвергнуты. Ваша таблица была построена в процессе проверки и опровержения этих догадок. Эти мертвые и теперь уже забытые догадки подсказали факты, а не факты подсказали догадки. **Наивные догадки не являются индуктивными догадками; мы приходим к ним путем испытаний и ошибок, через предположения и опровержения[123].**

Но если вы думаете — неправильно,— что пришли к ним индуктивным путем от ваших таблиц, если вы верите, что чем длиннее таблица, тем больше догадок она подскажет и потом поддержит, то вы можете потратить даром свое время, собирая ненужные данные. Таким образом, проникшись доктриной, что путь открытия ведет от фактов к догадкам и от догадки к доказательству (миф индукции), вы можете

---

[121] Полья (1957), т. I, стр. 5 и 7.

[122] См. прим.118.

[123] Эти испытания и ошибки были прекрасно реконструированы Полья. Первая догадка состоит в том, что F возрастает вместе с V. Когда это было отвергнуто, то последовали еще две догадки: E возрастает вместе с F; E возрастает вместе с V. Четвертой была выигрышная догадка: P + V возрастает вместе с E (1954, т. I, стр. 35—37).

полностью забыть об эвристической альтернативе: дедуктивном угадывании[124].

Математическая эвристика очень похожа на научную эвристику — не потому, что обе являются индуктивными, но потому, что обе характеризуются догадками, доказательствами и опровержениями. Важная разница заключается в природе соответствующих догадок, доказательств (в науке — объяснений) и контрапримеров[125] .

Бета. Понимаю. Тогда наша наивная догадка никогда не была первой догадкой, «подсказанной» жесткими непредположительными фактами; ей предшествовали многие «донаивные» догадки и опровержения. Логика догадок и опровержений не имеет исходной точки, но логика доказательств и опровержений имеет ее: она начинается с первой наивной догадки, за которой должен последовать мысленный эксперимент.

Альфа. Может быть. Но тогда я не стал бы называть ее «наивной»[126] .

Каппа *(в сторону)*. Даже в эвристике нет такой вещи, как совершенная **наивность**.

Бета. Главное - как можно скорее выйти из периода испытаний и ошибок, быстро перейти к мысленным экспериментам, не имея слишком много «индуктивного» уважения к «фактам». Это уважение может задерживать рост знания. Представьте себе, что при помощи испытаний и ошибок вы пришли к догадке V—E+F = 2 и что она будет сразу же отвергнута наблюдением: для картинной рамы V — E + F = 0. Если вы слишком уважаете факты, в особенности когда они опровергают ваши догадки, вы пойдете снова к до-наивным испытаниям и ошибкам и будете искать другую догадку. Но если вы обладаете лучшей эвристикой, то вы по крайней мере **попытаетесь** игнорировать неприятное испытание наблюдением и попробуете **испытание мысленным экспериментом**, вроде доказательства Коши.

Сигма. Какая путаница! Зачем называть **испытанием доказательство Коши**?

Бета. Зачем называть **испытанием доказательство** Коши? Это было испытание! Послушайте. Вы начали с наивной догадки: V—E + F=2 для всех многогранников. Затем вы отсюда вывели следствие: «если наивная догадка справедлива, то после устранения одной грани для оставшейся сети будет V—E+F = 1»; «если это следствие справедливо, то V—E+F=1, даже после триангуляции»; «если это последнее следствие справедливо, то V—E+F=1 будет справедливым, когда мы будем отнимать треугольники по одному»; «если это верно, то V—E + F = 1 для одного-единственного треугольника»...

Теперь это последнее заключение оказалось общеизвестным, истинным. Но что произошло бы, если бы мы заключили, что для единственного треугольника V—E+F = 0? Мы сразу же отвергли бы первоначальное предположение как ложное. Все, что мы сделали, сводится к тому, что мы испробовали нашу догадку, а именно выводили из нее следствия. Испытание, по-видимому, подтвердило нашу догадку.

---

[124] С другой стороны, те, которые вследствие обычного дедуктивного представления математики начинают думать, что путь открытия идет от аксиом и (или) определений к доказательствам и теоремам, могут полностью забыть о возможности и важности наивного угадывания. Фактически в математической эвристике наибольшую опасность представляет дедуктивизм, тогда как в научной эвристике, наоборот, индуктивизм.

[125] Возрождением математической эвристики в этом веке мы обязаны Полья. Его подчеркивание сходств между математической и научной эвристикой является одной из важных черт его замечательного труда. То, что можно рассматривать как единственную его слабость,— связано с его силой: он никогда не ставил под вопрос индуктивность науки и вследствие своего правильного представления глубоких аналогий между научной и математической эвристикой пришел к мысли, что математика тоже является индуктивной. То же самое случилось ранее с Пуанкаре (см. его книгу, 1902, Введение) и также с Фреше (1938).

[126] См. реплику Альфы.

Но подтверждение еще не доказательство.

Сигма. Но тогда наше доказательство доказало даже еще меньше, чем мы думали! Тогда нам нужно обратить процесс и попытаться построить мысленный эксперимент, который идет в противоположном направлении: от треугольника назад к многограннику!

Бета. Это верно. Только Дзета показал, что вместо решения нашей задачи сначала путем создания наивной догадки при помощи испытаний и ошибок, затем проверки, затем обращения испытания в доказательство можно сразу же начать с реального доказательства. Если бы мы поняли возможность дедуктивного угадывания, то мы могли бы избежать всей этой псевдоиндуктивной возни!

Каппа *(в сторону).* Что за драматическая серия **поворотов** на 180°! Критически настроенный Альфа обратился в догматика, догматик Дельта в опровергателя, а теперь индуктивист Бета в дедуктивиста!

Сигма. Но подождите. Если за **испытательным мысленным экспериментом**...

Бета. Я назову его **анализом**...

Сигма ...может всегда сразу последовать **доказательный мысленный эксперимент**...

Бета. Я назову его синтезом...[127]

Сигма. ...то будет ли «аналитическая теорема» необходимо тождественной с «синтетической»? Идя в противоположном направлении, мы можем пользоваться другими леммами[128].

Бета. Если они будут другими, то синтетическая теорема должна заменить аналитическую; в конце концов анализ только **испытывает**, тогда как синтез **доказывает**.

Учитель. Ваше открытие, что наше **«доказательство»** фактически было **испытанием**, как будто шокировало класс и отвлекло его внимание от вашего главного аргумента: именно, если мы имеем догадку, уже опровергнутую контрапримером, то мы должны отложить опровержение в сторону и попытаться испробовать догадку при помощи мысленного эксперимента. Таким путем мы могли бы напасть на доказательство, оставить фазу испытаний и ошибок и пустить в ход метод доказательств и опровержений. Но ведь именно это и заставило меня сказать, что «я готов заняться „доказательством" ложного предположения»[129]. И тогда Ламбда потребовал в своем **Правиле 1**: «Если вы имеете какую-нибудь догадку, то попробуйте доказать ее и опровергнуть ее».

Дзета. Это верно. Но позвольте мне дополнить правило Ламбды и **Правило 4** Омеги так:

Правило 5. *Если у вас есть контрапример любого типа, попробуйте при помощи дедуктивного гадания найти более глубокую теорему, для которой уже более не будет контрапримеров.*

Омега. Вы теперь расширяете мое понятие «глубины» и, может быть, вы и правы. Но как же быть с действительным применением нашего нового правила? До сих пор оно только давало нам результаты, которые мы уже знали. Легко быть мудрым после события. Ваше «дедуктивное гадание» как раз представляет **синтез**, соответствующий первоначальному **анализу** Учителя. Но теперь вы должны быть

---

[127] Согласно эвристике Паппа, математическое открытие начинается с догадки, за которой следует **анализ**. Предполагается, что если **анализ** не обнаружит ложность догадки, то затем следует **синтез** (см. примечания 17 и 110). Но в то время как наше понимание **анализа-синтеза улучшает** предположение, паппово понимание только **доказывает или отвергает его.**

[128] См. Robinson (1936), стр. 471.

[129] См. реплику Учителя.

честным — вы должны использовать ваш метод для нахождения догадки, которой вы еще не знали, с обещанным увеличением содержания.

Дзета. Правильно. Я начну с теоремы, рожденной **моим** мысленным экспериментом: «**Все закрытые нормальные многогранники будут эйлеровыми**».

Омега. «Нормальные»?

Дзета. Я не желаю тратить времени на прохождение через метод доказательств и опровержений. Я просто называю «нормальными» все многогранники, которые могут быть построены, исходя из «совершенного» многоугольника, прикладывая к нему (а) первые F — 2 граней без изменения V — E + F (это будут **открытые** нормальные многогранники) и (б) наконец, закрывающую грань, которая увеличивает V—E+F на 1 (и превращает **открытый** многогранник в **закрытый**).

Омега. «Совершенный» многоугольник?

Дзета. Под «совершенным» многоугольником я подразумеваю такой, который может быть построен, исходя из одной-единственной вершины, прикладыванием к ней сначала n—1 ребер без изменения V—E и, наконец, последнего закрывающего ребра, которое уменьшает V—E на 1.

Омега. Будут ли ваши закрытые нормальные многогранники совпадать с многогранниками Коши?

Дзета. Я не желаю сейчас углубляться в это.

г) Увеличение содержания путем дедуктивного угадывания

Учитель. Достаточно предварительных замечаний. Посмотрим ваш вывод.

Дзета. Хорошо, сэр. Я беру два закрытых нормальных многогранника (рис. 20,а) и склеиваю их вместе по многоугольному обводу так, чтобы исчезли две склеивающиеся грани (рис. 20, б). Так как для двух многогранников V—E+F=4, то исчезновение двух граней в соединенном многограннике восстановит формулу Эйлера — ничего удивительного после доказательства Коши, так как новый многогранник может быть легко раздут в шар. Таким образом, формула хорошо выдерживает это испытание приклеиванием. Но попробуем теперь испытать двойное приклеивание: склеим вместе два многогранника по двум многоугольным обводам (рис. 20, в). Теперь исчезнут 4 грани и для нового многогранника V—E+F = 0.

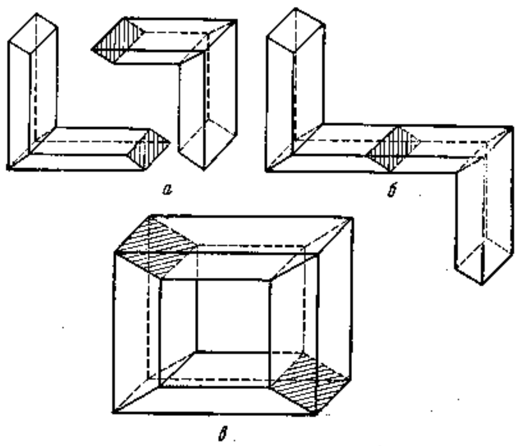


Рис. 20

Гамма. Это **контрапример 4** Альфы, картинная рама!

Дзета. Теперь если при помощи «двойного приклеивания» я прикреплю к этой картинной раме (рис. 20, в) еще один нормальный многогранник (рис. 21,а), то V — E + F будет —2 (рис. 21,б).

Сигма. Для моносфероидального многогранника V—E+F=2, для дисфероидального V—E+F = 0, для трисфероидального V — E + F = — 2, для n-сфероидального V — E + F = 2—2*(n-1)...

Дзета. ...что представляет вашу новую догадку с содержанием, бывшим еще неизвестным, полную и с доказательством и без составления какой-нибудь таблицы[130] .

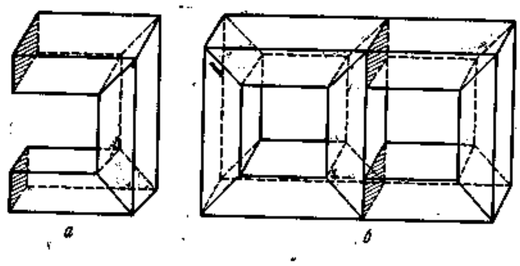


Рис. 21

Сигма. Это действительно прекрасно. Вы не только объяснили упорную картинную раму, но вы создали еще бесконечное множество новых контрапримеров...

Дзета. С полным объяснением.

Ро. Я как раз пришел к тому же результату другим путем. Дзета начал с двух эйлеровых примеров и превратил их в контрапример, контролируя экспериментом. Я начинаю с контрапримера и превращаю его в пример. Я сделал следующий умственный эксперимент с картинной рамой: «Пусть многогранник будет из какого-нибудь материала, который легко режется как мягкая глина; пропустим нитку через туннель, а затем через глину. Многогранник не распадется[131]... Но он сделается знакомым, простым сфероидальным многогранником! Это верно, мы увеличим число граней на 2, а числа и ребер и вершин на m; но так как мы знаем, что эйлерова характеристика простого многогранника равна 2, то первоначальный должен был иметь характеристику 0. Теперь, если для того чтобы сделать многогранник простым, необходимо большее число, скажем n, таких разрезов, то его характеристика будет 2-2*n.

Сигма. Это интересно. Дзета уже показал нам, что мы можем не нуждаться в догадке для начала **доказательства**, что мы можем непосредственно произвести **синтез**, т. е. доказательный умственный эксперимент над близким предложением, которое, как мы знаем, является верным. Теперь Ро показывает, что мы можем обойтись без догадки даже для начала **испытания**, но, **предполагая**, что результат уже имеется, мы можем заняться придумыванием **анализа**, т. е. проверочного мысленного эксперимента[132] .

Омега. Однако какой бы путь вы ни выбрали, все еще остаются кучи необъясненных многогранников. По вашей новой теореме для всех многогранников V—E + F будет четным числом, меньшим 2. Но мы видели также несколько

---

130 Это было сделано Рашигом (Raschig, 1891).

131 Hoppe (1879), стр. 102.

132 Это тоже часть папповой эвристики. **Анализ**, начинающийся с догадки, он называет «**теоретическим**», а анализ, начинающийся без догадки,— «**проблемным**» (Heath, 1925, т. I, стр. 138). Первый относится к **проблемам для доказательства**, а второй — к **проблемам для решения** (или к **проблемам для нахождения**). См. также Polya (1945), стр. 129-136 («Папп») и 197-204 («Работая назад»).

многогранников с нечетными эйлеровыми характеристиками. Возьмите увенчанный куб (рис. 12) с V-E+F=1...

Дзета. Я никогда не говорил, что моя теорема приложима ко всем многогранникам. Она применима только ко всем n-сфероидальным многогранникам, построенным согласно моей конструкции. В настоящем ее состоянии она не приводит к кольцеобразным граням.

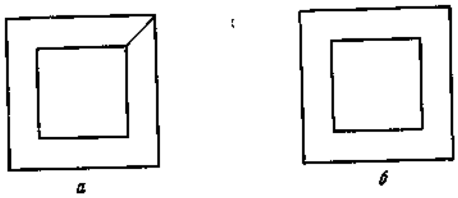


Рис. 22

Омега. Да?

Сигма. Я знаю! Ее можно распространить и на многогранники с кольцеобразными гранями: можно построить кольцеобразный многоугольник, уничтожив ребро в рожденной доказательством подходящей системе многоугольников, не изменяя числа граней (рис. 22, а и 22, б). Я думаю, не существуют ли также «нормальные» системы многоугольников, построенные в согласии с нашим доказательством, в которых можно уничтожить даже более одного ребра, не уменьшая числа граней...

Гамма. Это правда. Посмотрите на такую «нормальную» систему многоугольников (рис. 23,а). Вы можете уничтожить два ребра, не уменьшая числа граней (рис. 23,б).

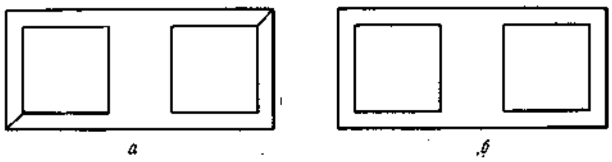


Рис. 23

Сигма. Хорошо! Тогда вообще

$$V - E + F = 2 - 2(n-1)\sum_{k=1}^{F} l_k$$

для n-сфероидальных, или n-связных, многогранников с l_k ребрами, которые можно уничтожить без уменьшения числа граней.

Бета. Эта формула объясняет мой увенчанный куб (рис. 12) , моносфероидальный многогранник (с n=1) с одной кольцеобразной гранью: все l_k равны нулю, кроме l_1, которое будет 1, или:

$$\sum_{k=1}^{F} l_k = 1,$$

следовательно, V-E+F=1.

Сигма. Она также объясняет ваш «иррациональный» эйлеров каприз: куб с двумя кольцеобразными гранями и туннелем (рис. 16). Это дисфероидальный многогранник (n = 2) с

$$\sum_{k=1}^{F} l_k = 2$$

Следовательно, его характеристика будет V-E+F=2-2+2=2. В мире многогранников восстановлен моральный порядок[133]

Омега. А как для многогранников с полостями?

Сигма. Я знаю! Для них нужно сложить эйлеровы характеристики каждой отдельной несвязанной поверхности[134],

$$V - E + F = \sum_{j=1}^{k} \left\{ 2 - 2(n-1) + \sum_{k=1}^{F} l_k \right\}$$

Бета. А тетраэдры-близнецы?

Сигма. Я знаю!..

Гамма. Какой смысл всей этой точности? Остановите этот поток претенциозных тривиальностей![135]

Альфа. А почему должен он прекратиться? Разве тетраэдры-близнецы — монстры, а не настоящие многогранники? Тетраэдр-близнец такой же хороший многогранник, как и ваш цилиндр! Но вам нравилась **лингвистическая** точность[136]. Почему же вы осмеиваете нашу новую точность? Мы должны добиться, чтобы теорема охватила **все** многогранники; делая ее точной, мы увеличиваем, а не уменьшаем ее содержание. В этом случае точность будет добродетелью!

Каппа. Скучные добродетели так же плохи, как и скучные пороки! Кроме того, вы никогда не достигнете полной точности. Мы должны остановиться там, где нам перестанет быть интересным идти дальше.

Альфа. Моя точка зрения иная. Мы начали с положения

---

[133] Этот «порядок» был восстановлен Люилье приблизительно с той же формулой (1812—1813, стр. 189) и Гессолем с нескладной, придуманной ad hoc формулой относительно различных способов соединения друг с другом эйлеровых многогранников (1832, стр. 19—20). Ср. примечание 116.

[134] Исторически Люилье в своей книге (1812—1813) при помощи наивной догадки сумел обобщить формулу Эйлера и пришел к такой формуле: $V - E + F = 2[(c - T + 1) + (p_1, + p_2 + ...)]$, где c — число полостей, T — туннелей и p_i — число внутренних многоугольников на каждой грани. Он также доказал ее для «внутренних многоугольников», но туннели как будто доставили ему затруднения. Он построил эту формулу, пытаясь разобраться в своих трех видах «исключений», но его список исключений неполон (см. примечание 37). Более того, эта неполнота не была единственной причиной ложности его наивной догадки; он не заметил, что могут существовать многосвязные полости, что не всегда можно однозначно определить число туннелей в многограннике с разветвляющимися туннелями, и что основное значение имеет не «число внутренних многоугольников», но число кольцеобразных граней (его формула отказывает в случае двух прилегающих внутренних многоугольников с общим ребром). Критику индуктивного обобщения Люилье можно найти у Листинга (1861, стр. 98—99). См. также примечание 159.

[135] Очень небольшое число математиков девятнадцатого столетия были смущены таким тривиальным увеличением содержания и действительно не знали, что с ним делать. Некоторые — вроде Мебиуса — пользовались определениями, устраняющими монстры (см. стр. 24); другие — вроде Гоппе — исправлением монстров. Книга Гоппе (1879) в особенности показательна. С одной стороны, он — как большое число его современников — очень хотел получить совершенно законченную «обобщенную формулу Эйлера», которая покрывала бы все. С другой стороны, он чувствовал отвращение к тривиальным сложностям. Поэтому, говоря, что его формула «полная, всеобъемлющая», он смущенно добавлял, что «особые случаи могут сделать сомнительным перечисление (составных элементов)» (стр. 103). Иными словами, если какой-нибудь неуклюжий многогранник не подходит под его формулу, то его элементы были неправильно сосчитаны и это уродство должно быть исправлено при помощи правильного зрения; например, общие вершины и ребра тетраэдров-близнецов должны быть увидены и сосчитаны дважды и каждый близнец должен считаться за отдельный тетраэдр (там же). Дальнейшие примеры см. примечание 166.

[136] См. параграф 5, г.

(1): одна вершина есть одна вершина.

Отсюда мы вывели

(2) : V=E для всех совершенных многоугольников.

Отсюда мы вывели

(3):V — E + F=1 для всех нормальных открытых систем многоугольников.

Отсюда

(4):V—E+F=2 для всех нормальных закрытых систем многоугольников, т. е. для многогранников.

Отсюда, по очереди, снова

(5) : F — E + F = 2— 2 (n — 1) для нормальных n-сфероидальных многогранников.

$$(6) : V - E + F = 2 - 2(n-1) + \sum_{k=1}^{F} l_k$$

для нормальных n-сфероидальных многогранников с многосвязными гранями,

$$(7) : V - E + F = \sum_{j=1}^{k} \left\{ 2 - 2(n-1) + \sum_{k=1}^{F} l_k \right\}$$

для нормальных n-сфероидальных многогранников с многосвязными гранями и полостями.

Разве это не чудесное раскрытие скрытых богатств, содержавшихся в тривиальной исходной точке? И так как (1) несомненно истинно, то также будет и остальное.

Ро (в сторону). Скрытые «богатства»? Два последних пункта показывают только, как **дешево** можно получить обобщения[137].

Ламбда. Вы серьезно думаете, что (1) является единственной аксиомой, из которой вытекает все остальное? Что дедукция увеличивает содержание?

Альфа. Конечно! Разве это не чудо дедуктивного мысленного эксперимента? Если вы уж схватили маленькую истину, то дедукция неизбежно развернет ее в дерево познания[138]. Если дедукция **не** увеличивает содержания, то я назвал бы ее не дедукцией, но «проверкой»; проверка отличается от истинного доказательства как раз тем, что она бывает чисто аналитической и также бесплодной[139].

Ламбда. Но, конечно, дедукция не может увеличить содержания. Если критика устанавливает, что заключение богаче предпосылок, то нам нужно усилить предпосылки, выявив скрытые леммы.

Каппа. А эти скрытые леммы содержат софистич-ность и погрешимость и в

---

[137] Ср. реплику Гаммы и сл.

[138] Древние философы не колебались выводить догадку из очень тривиального ее следствия (см., например, наше синтетическое доказательство, ведущее от треугольника к многограннику). Платон считал, что «единственная аксиома может быть вполне достаточной для рождения целой системы». Вообще он думал, что одна гипотеза является плодовитой сама по себе, пренебрегая в своей методологии другими предпосылками, с которыми он соединял ее (Робинсон, 1953, стр. 168). **Это характерно для древней неформальной логики, т. е. для логики доказательства, или мысленного эксперимента, или построения; мы считаем ее как бы *энтимематической*** (уже содержащейся в мысли.— И. В.) **вследствие задней мысли; только позже увеличение содержания стало знаком не силы, но слабости индукции**. Древнюю неформальную логику энергично защищали Декарт, Кант, Пуанкаре; все они пренебрегали аристотелевской формальной логикой, отбрасывая ее как бесплодную и не относящуюся к делу, и в то же самое время восхваляя непогрешимость плодовитой неформальной логики.

[139] Пуанкаре (1902), стр. 33.

конце концов уничтожают миф о непогрешимой дедукции[140].

Учитель. Есть еще вопросы относительно метода Дзеты?

д) Логические контрапримеры против эвристических

Альфа. Мне нравится **Правило 5**[141] Дзеты так же, как и **Правило 4** [142] Омеги. Мне нравился метод Омеги за то, что он искал локальные, а не глобальные контрапримеры, как раз те самые, которые первоначальными тремя правилами Ламбды[143] игнорировались как логически безобидные и, следовательно, эвристически неинтересные. Омега был ими побужден к изобретению новых мысленных экспериментов: реальный прогресс в нашем знании!

Теперь Дзета вдохновляется контрапримерами, которые одновременно являются и локальными, и глобальными — прекрасными подтверждениями с логической, но не с эвристической точки зрения; хотя они и подтверждения, но все же призывают к действию. Дзета предлагает распространить, сделать усложненным наш первоначальный мысленный эксперимент, превратить логические подтверждения в эвристические, логически удовлетворительные примеры в такие, которые будут удовлетворительными и с логической, и с эвристической точки зрения.

И Омега, и Дзета стоят за новые идеи, тогда как Ламбда, и особенно Гамма, заняты лишь лингвистическими трюками с их неуместными глобальными, но не локальными контрапримерами — единственными существенными с их причудливой точки зрения.

Тета. Так что же, логическая точка зрения будет «причуднической»?

Альфа. Если это **ваша** логическая точка зрения, то да. Но я хочу сделать еще одно замечание. Увеличивает ли дедукция содержание или нет — заметьте, что она, конечно, это делает — она, по-видимому, наверняка гарантирует **непрерывный рост знания**. Мы начинаем с одной вершины и заставляем знание расти насильственно и гармонически для выяснения соотношения между числами вершин, ребер и граней какого угодно многогранника: чистый не драматический рост без опровержений!

Тета. (Каппе). Разве Альфа потерял способность суждений? Начинают с **задачи**, а не с вершины[144]!

Альфа. Эта постепенная, но неодолимо победоносная кампания приведет нас к теоремам, которые «не являются сами по себе очевидными, но только выведены из истинных и известных принципов при помощи постоянного и непрерывающегося действия ума, который отчетливо видит каждый шаг процесса» [145]. Эти теоремы никак не могут быть получены «беспристрастным» наблюдением и внезапной вспышкой интуиции.

Тета. В этой окончательной победе я все же сомневаюсь. Такого рода рост

---

[140] Поиски скрытых лемм, зародившиеся только в математическом критицизме середины девятнадцатого века, были тесно связаны с процессом, который позднее **доказательства заменил анализом доказательств и законы мысли – законами языка**. Наиболее важным достижением в теории логики обыкновенно предшествовало развитие математического критицизма. К несчастью, даже лучшие историки логики стремятся обращать исключительное внимание на **изменения в логической теории**, не замечая их корней в **изменениях логической практики**. См. также примечание 179.

[141] См. Правило 5 Дзеты.

[142] См. Правило 4 Омеги.

[143] См. правила Ламбды.

[144] Альфа, конечно, кажется соскользнувшим в ложность дедуктивной эвристики. Ср. примечание 125.

[145] Декарт (1628), Правило III.

никогда не приведет нас к цилиндру — так как (1) начинает с вершины, а у цилиндра их нет. Также, может быть, мы никогда не достигнем односторонних многогранников или многогранников с большим числом измерений.

Это постепенное непрерывное распространение вполне может остановиться на какой-нибудь точке и вам придется ждать нового революционного толчка. И даже такая «мирная непрерывность» полна опровержений и критики! Что заставляет нас идти от (4) к (5), от (5) к (6) и от (6) к (7), как не постоянное давление контрапримеров, являющихся и глобальными, и локальными? В качестве подлинных контрапримеров Ламбда принимал только такие, которые являются глобальными, но не локальными: они обнаруживают **ложность** теоремы. Правильно оцененным Альфой было нововведение Омеги — в качестве подлинных контрапримеров рассматривать и такие, которые являются локальными, но не глобальными: они обнаруживают, что теорема бедна **истиной**. Теперь Дзета советует нам считать подлинными и такие контрапримеры, которые являются и глобальными, и локальными: они тоже обнаруживают у теоремы **бедность истиной**. Например, картинные рамы для теоремы Коши будут и глобальными, и локальными контрапримерами: они, конечно, будут подтверждениями, если рассматривать одну только **истину**, но опровержениями, если рассматривать **содержание**. Мы можем первые (глобальные, но не локальные) контрапримеры назвать **логическими**, а остальные — **эвристическими контрапримерами**. Но чем больше мы признаем опровержений — логических или эвристических — тем быстрее растет знание. Логические контрапримеры Альфа считает неуместными, а эвристические контрапримеры вообще отказывается называть контрапримерами и все по причине его одержимости идеей, что рост математического знания непрерывен и критика не играет никакой роли.

Альфа- Понятие об опровержении и понятие о критике вы искусственно распространяете только для того, чтобы оправдать вашу критическую теорию роста знания. Разве лингвистические хитрости могут быть орудиями философов?

Пи. Я думаю, что обсуждение образования понятий поможет нам выяснить исход спора.

Гамма. Мы все навострили уши.

8. Образование понятий

а) Опровержение при помощи расширения понятий. Переоценка устранения монстров и пересмотр понятий ошибки и опровержения

Пи. Я хотел бы сначала вернуться назад в период до Дзеты или даже до Омеги, к трем основным методам формирования теории: устранению монстров, устранению исключений и методу доказательств и опровержений. Оба они начинали с одной и той же наивной догадки, но кончили **различными теоремами и различными теоретическими терминами**. Альфа уже очертил некоторые аспекты этих различий[146], но его обзор недостаточен — особенно в случае устранения монстров и метода доказательств и опровержений. Альфа думал, что устраняющая монстры теорема «за тождеством лингвистического выражения скрывает существенное улучшение» наивной догадки: он думал, что Дельта класс «наивных» многогранников постепенно сжимал в класс, очищенный от неэйлеровых монстров.

Гамма. А что было дурного в обзоре Альфы?

Пи. То, что не устранители монстров **сжимают** понятия, это опровергатели **расширяют** их.

Дельта. Слушайте, слушайте!

---

[146] См. реплику Альфы.

Пи. Вернемся назад ко времени первых исследователей нашего вопроса. Они были зачарованы прекрасной симметрией **правильных** многогранников; они думали, что пять правильных тел содержат тайну космоса[147]. В то время была выставлена догадка Декарта — Эйлера, и понятие многогранника включало всякого сорта выпуклые многогранники и даже некоторые с вогнутостями. Но тогда это понятие не включало многогранников, которые не были простыми, или многогранников с кольцеобразными гранями. Для всех многогранников, которые тогда имелись в виду, догадка в ее тогдашнем состоянии была правильна и доказательство не имело погрешностей[148] .

Затем выступили опровергатели. В своей критической ревности они расширяли понятие многогранника, чтобы покрыть предметы, которые были чуждыми предложенному истолкованию. В **предположенном истолковании** догадка была верной, она оказалась неправильной только в **непредполагавшемся истолковании**, внесенном контрабандой опровергателями. Их «опровержение» не обнаружило ни **неверности** в первоначальной догадке, ни **ошибки** в первоначальном доказательстве; оно обнаружило только ложность **новой** догадки, которую никто не выставлял и о которой никто еще раньше не думал.

Бедный Дельта! Он храбро защищал первоначальное толкование многогранника. Он противодействовал каждому контрапримеру новым ограничением для спасения первоначального понятия...

Гамма. Но разве не Дельта изменял каждый раз своей позиции? Когда мы выставляли новый контрапример, он менял свое определение на более длинное, которое обнаруживало еще одно из его скрытых «ограничений»!

Пи. Какая чудовищная переоценка устранения монстров! Он только **казался** изменяющим свою позицию. Вы несправедливо обвиняли его в пользовании потайными терминологическими эпициклами в защиту упорной идеи. Его несчастием было это пышное **Определение 1**: «Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из многоугольных граней», за которое опровергатели сразу же и ухватились. Но Лежандр предполагал покрыть им **только** свои наивные многогранники; что оно покрывало гораздо большее число, этого предложивший и не понял и не намеревался понять. Математическая публика была готова проглотить чудовищное содержание, которое медленно выплывало из этого правдоподобного, невинного по виду определения. Вот почему Дельте приходилось все время лепетать: «Я думал...» и продолжать выявление своих бесконечных «молчаливых» ограничений; все это потому, что наивное понятие никогда не было закреплено, и

---

[147] См. Люилье (1812-1813а), с.233.

[148] Рис. 6 в книге Эйлера (1750) изображает первый многогранник с вогнутостями, появившийся в геометрических текстах. Лежандр говорит о выпуклых и вогнутых многогранниках в своей книге (1794). Но до Люилье никто не упоминал вогнутых многогранников, которые не были простыми.

Однако можно добавить одно интересное замечание. Первым классом многогранников, который когда-нибудь подвергался исследованию, были пять обыкновенных правильных многогранников и квазиправильные многогранники вроде призм и пирамид (ср. Евклид). После Возрождения этот класс был распространен в двух направлениях. Одно из них указано в тексте: включены все выпуклые и некоторые слегка заостренные многогранники. Другое направление принадлежало Кеплеру: он расширил класс правильных многогранников изобретением правильных звездчатых многогранников. Но кеплерово нововведение было забыто и возобновлено лишь Пуансо (см. прим. 26.). Звездчатые многогранники Эйлеру наверняка не снились. Коши знал их, но его ум был как-то разделен на отдельные помещения: когда у него появлялась интересная идея о звездчатых многогранниках, то он публиковал ее; однако, представляя контрапримеры для своей общей теоремы о многогранниках, он игнорировал звездчатые многогранники. Молодой Пуансо (1809) поступал не так, но позже он изменил свое мнение (см. прим. 49).

Таким образом, утверждение Пи, хотя и правильное с эвристической точки зрения (т. е. верное в рациональной истории математики), исторически является ошибочным. (Это не должно нас беспокоить: действительная история часто бывает карикатурой на рациональные ее реконструкции).

простое, но чудовищное, непредполагавшееся определение вытеснило его. Но вообразим другую ситуацию, когда определение правильно фиксировало предположенное толкование «многогранника». Тогда опровергателям пришлось бы выдумывать все более длинные определения, **включающие монстры**, скажем, для «комплексных многогранников»: «Комплексным многогранником называется агрегат (реальных) многогранников, таких, что каждая пара их спаяна конгруэнтными гранями». «Грани комплексных многогранников могут быть комплексными многоугольниками, которые являются агрегатами (реальных) многоугольников, таких, что каждая пара их спаяна конгруэнтными ребрами». Такой **комплексный многогранник** будет соответствовать рожденному опровержением понятию **многогранника** у Альфы и Гаммы — первое определение допускало также многогранники не являвшиеся простыми, а второе — грани, которые не были односвязными. Таким образом, изобретение новых определений не будет необходимым делом устранителей монстров или охранителей понятий — им могут также заниматься включатели монстров или распространители понятий[149].

Сигма. Понятия и определения — т. е. предположенные понятия и непредполагавшиеся определения — могут тогда устраивать хитрые штуки одно другому. Я никогда не думал, что образование понятий может тянуться вслед за бессознательно широким определением!

Пи. Да, может. Устранители монстров только сохраняют первоначальное определение, тогда как расширители понятий увеличивают его; любопытная вещь заключается в том, что расширение понятий идет скрыто; никто этого не сознает и так как «координатная система» всякого человека расширяется по мере того, как увеличивается объем понятий, то он становится жертвой эвристического обмана зрения, что устранение монстров **сужает** понятия, тогда как в действительности оно сохраняет их неизменными.

Дельта. Тогда кто же был интеллектуально нечестным? Кто сделал тайные изменения в своей позиции?

Гамма. Я допускаю, что мы были неправы, обвиняя Дельту за скрытые сжатия его понятия о многограннике; .все шесть его определений означали то же самое доброе старое понятие о многограннике, которое он унаследовал от своих предков. **Он определял одно и то же бедное понятие в возрастающем богатстве теоретических форм выражения или языков; устранение монстров не образует понятий, но только переводит определения на другой язык.** Устраняющая монстры теорема не представляет улучшения наивной догадки.

Дельта. Вы считаете, что все мои определения были логически эквивалентными?

Гамма. Это зависит от вашей логической теории — по моей они, конечно, не были такими.

Дельта. Вы должны сознаться, что такой ответ не очень помогает. Но скажите мне, опровергали ли вы наивную догадку? Вы опровергали ее, только извращая тайком ее первоначальное толкование!

Гамма. Ну, мы опровергли ее более интересным толкованием, заставляющим работать воображение, как вы и не грезили. **Это-то и составляет разницу между опровержениями, которые только обнаруживают глупую ошибку, и опровержениями, являющимися большими событиями в росте знания.** Если вследствие неумения считать вы нашли бы, что «для всех многогранников V — E+F=1» и я исправил бы вас, то я не назвал бы это «опровержением».

Бета. Гамма прав. После откровения Пи мы могли бы колебаться называть

---

[149] Интересный пример определения, включающего монстры, представляет данное Пуансо вторичное определение **выпуклости**, включающее звездчатые многогранники в респектабельный класс выпуклых правильных тел (1809).

наши контрапримеры **логическими контрапримерами**, так как они все же не являются несовместными с догадкой в ее первоначально предполагавшемся толковании: однако они определенно будут **эвристическими контрапримерами**, так как побуждают рост знания. Если бы нам пришлось принять узкую логику Дельты, то знание не возрастало бы. Предположим, что кто-нибудь с узкой системой понятий познакомится с данным Коши доказательством эйлеровой теоремы. Он найдет, что все этапы этого мысленного эксперимента легко могут быть выполнены на **любом** многограннике. Он примет как очевидный, не вызывающий сомнения «факт», что все многогранники являются простыми и что все грани односвязны. Ему никогда не придет в голову превратить свои «очевидные» леммы в условия для некоторой исправленной догадки и таким образом построить теорему, — потому что отсутствует стимул контрапримеров, показывающих, что некоторые «тривиально истинные» леммы неверны. Таким образом, он будет думать, что «доказательство» без всякого сомнения устанавливает истинность наивной догадки, что ее правильность вне всяких сомнений. Но его «уверенность» совсем не будет признаком успеха, она только симптом отсутствия воображения, концептуальной бедности. Она создает уютную удовлетворенность и препятствует росту знания[150].

---

[150] Фактически так и было в случае Коши. Непохоже, чтобы Коши, уже открыв свой революционный метод устранения исключений (см. замечание автора), не стал бы искать и не нашел бы некоторых исключений. Не он, вероятно, подошел к проблеме исключений только позже, когда решил расчистить хаос в анализе. (По-видимому, Люильe первый заметил и учел тот факт, что такой «хаос» не ограничивается анализом).

Историки, в частности Steinitz в работе (1814—1831), говорят, что Коши, заметив неуниверсальную годность его теоремы, установил ее только для **выпуклых** многогранников. Действительно, в своем доказательстве он пользуется выражением «выпуклая поверхность многогранника» (1811, стр. 81), а в своей работе (1812) он возобновляет теорему Эйлера под общим заглавием «теоремы о телесных углах и выпуклых многогранниках». Но, вероятно, для противодействия этому заглавию он особенно подчеркивает **универсальную** приложимость теоремы Эйлера ко **всяким** многогранникам (теорема XI, стр. 94), тогда как три остальных теоремы (теорема XIII и два ее следствия), он формулирует специально для **выпуклых** многогранников (стр. 96 и 98).

Почему у Коши небрежна терминология? Понятие Коши о многограннике почти совпадало с понятием выпуклого многогранника. Но оно не совпадало в точности: Коши знал вогнутые многогранники, которые можно получить, слегка вдавливая во внутрь грань выпуклого многогранника, но он не обсуждал казавшихся неуместными дальнейших **подтверждений** — не **опровержений** — его теоремы. (**Подтверждения нельзя равнять с контрапримерами, или даже с «исключениями», в качестве катализаторов роста понятий**). Такова причина случайного употребления Коши слова «выпуклый»; скорее это было неудачей, невозможностью понять, что вогнутые многогранники могут дать контрапримеры, чем сознательной **попыткой** исключить эти контрапримеры. В том же самом параграфе он аргументирует, что теорема Эйлера представляет «непосредственное следствие» леммы, что V — E + F — 1 для **плоской** многоугольной сети, и утверждает, что «для приложимости теоремы V — E + F = 1 не имеет значения, лежат ли многоугольники в одной, или в различных плоскостях, так как теорема интересуется только числом многоугольников и числом их составных элементов» (стр. 81). Этот аргумент вполне правилен в узкой концептуальной системе Коши, но будет неправильным в более широкой, в которой «многогранником» можно назвать, скажем, картинную раму. Этот аргумент часто повторялся в первой половине девятнадцатого столетия [См. Оливье (Olivier), 1826, стр. 230, или Грунерт (Grunert), 1827, стр. 367, или Балцер (H. Baltzer), 1860—1862, т. И, стр. 207. Он был раскритикован Беккером (1869), стр. 68].

Часто, как только расширение понятия опровергает предложение, то опровергнутое предложение кажется такой очевидной ошибкой, что нельзя даже представить, как могли се сделать великие математики. Эта важная характерная черта опровержения, связанного с расширением понятий, объясняет, почему уважаемые историки, не понимая, что понятия **растут**, создают для себя лабиринты проблем. После того, как они спасли Коши указанием, что он, вероятно, не мог упустить из виду «многогранников, которые не были простыми», и поэтому он «категорически» (!) **ограничил** теорему областью выпуклых многогранников, уважаемые историки должны теперь объяснить, почему граничная линия Коши «без всякой необходимости» была так узка. Почему он **игнорировал** невыпуклые эйлеровы многогранники? Объяснение Штейница таково: **корректная** формулировка теоремы Эйлера должна быть сделана в терминах связности поверхностей. Так как во времена Коши это понятие еще не было «ясно схвачено», то простейшим выходом было принять

б) Рожденное доказательством понятие против наивного. Теоретическая классификация против наивной.

Пи. Давайте вернемся к рожденной доказательством теореме «Все простые **многогранники** с односвязными гранями будут эйлеровыми». Эта формулировка может ввести в заблуждение. Нужно так: «Все простые **объекты** с односвязными гранями будут эйлеровыми».

Гамма. Почему?

Пи. Первая формулировка заставляет думать, что класс простых многогранников, встречающихся в этой теореме, является подклассом класса «многогранников» наивной догадки.

Сигма. Конечно, класс простых многогранников будет подклассом многогранников. Понятие «простого многогранника» **сужает** первоначальный широкий класс многогранников, ограничивая их теми, для которых выполняется первая лемма нашего доказательства. Понятие «простого многогранника с односвязными гранями» указывает на дальнейшее сужение первоначального класса...

Пи. Нет! Первоначальный класс многогранников содержал только те многогранники, которые были простыми и грани которых были односвязными. Омега ошибался, когда говорил, что включение лемм уменьшает содержание[151].

Омега. Но разве каждое включение лемм не исключает контрапример?

Пи. Конечно, исключает; но контрапример был произведен расширением понятия.

Омега. Значит включение леммы **сохраняет** содержание, как и устранение монстров?

Пи. Нет. Включение леммы **увеличивает** содержание; устранение же монстров нет.

Омега. Что? Вы действительно хотите убедить меня, что включение леммы не только не **уменьшает** содержания, но даже, что оно **увеличивает** его? Что вместо **сужения** понятий оно их **расширяет**?

Пи. Совершенно верно. Послушайте. Был ли элементом первоначального класса многогранников глобус, на котором нарисована политическая карта?

Омега. Конечно, нет.

Пи. Но он сделался им после доказательства Коши. Потому что вы без малейшего затруднения можете выполнить на нем доказательство Коши — если только на нем нет кольцеобразных стран или озер[152].

Гамма. Это верно! Если вы надуете многогранник в шар и измените ребра и грани, вы ничуть не помешаете выполнению доказательства — пока искажение не изменит числа вершин, ребер и граней.

Сигма. Я вижу, что вы хотите сказать. Тогда рожденный доказательством «простой многогранник» будет не только сужением, спецификацией, но также и **обобщением, распространением** наивного «многогранника»[153]. Идея такого

выпуклость (стр. 20). Так Штейниц объясняет ошибку, которой Коши никогда не делал.

Другие историки идут путем, отличным от этого. Они говорят, что до момента достижения правильной концептуальной системы (т. е. той, которую они знают) была только «средневековая тьма» с «редкими, если таковые и были, здравыми» результатами. Таким моментом в теории многогранников было, по Лебегу (1923, стр. 59—60), доказательство Жордана (Jordan, 1866) или, по Беллу (Bell, 1945, стр. 460), доказательство Пуанкаре (1895).

[151] См. реплику Омеги в параграфе 6, а.

[152] См. прим. 55.

[153] Дарбу (1874) близко подошел к этой идее. Позже она была ясно сформулирована Пуанкаре: «Математика есть искусство давать то же имя различным вещам... Если выбрать хороший язык, то

обобщения понятия многогранника, чтобы оно могло включить смятые, **криволинейные** «многогранники» с **искривленными** гранями, вряд ли могла прийти кому-нибудь в голову до доказательства Коши; даже если бы это случилось, то идея была бы отброшена как причуда. Но теперь это является естественным обобщением, так как операции нашего доказательства могут быть для них истолкованы так же хорошо, как и для обыкновенных простых многогранников с прямыми ребрами и плоскими гранями[154].

Пи. Хорошо. Но вам придется сделать еще один шаг. **Рожденные доказательством понятия** не представляют ни «спецификаций», ни «обобщений» наивных понятий: напор доказательств и опровержений на наивные понятия еще более революционен, чем это — они полностью **уничтожают** основные наивные понятия и **заменяют** их понятиями, рожденными доказательством[155]. Наивный термин «многогранник», даже после его расширения опровергателями, обозначал нечто похожее на кристалл, тело с «плоскими» гранями и прямыми ребрами. Идеи доказательства полностью проглотили и переварили это наивное понятие. В различных теоремах, рожденных доказательством, от этого наивного понятия ничего не осталось. Оно бесследно исчезло. Вместо этого каждое доказательство выявляет его характерные, рожденные доказательством понятия, которые касаются возможностей быть растянутым, надутым, фотографированным, проектированным и тому подобное. Старая задача исчезла, появились новые. После Колумба не следует удивляться, если **человек не решает ту задачу, которую он поставил себе для решения**.

Сигма. Таким образом «теория твердых тел», — первоначальное «наивное» царство эйлеровой догадки,— исчезает, новая переработанная догадка проявляется

можно удивиться, узнав, что доказательства, подготовленные для известного предмета, непосредственно применимы ко многим новым предметам без дальнейших изменений — можно даже удержать названия» (1908, стр. 375). Фреше называет это «необычайно полезным принципом обобщения» и формулирует его так: «Если ряд свойств математической единицы, использованный в доказательстве предложения об этой единице, не определяет эту единицу, то предложение может быть распространено так, что может быть применимо к более общей единице» (1928, стр. 18). Он указывает на то, что такие обобщения не являются тривиальными и «могут требовать очень больших усилий» (там же).

[154] Коши не заметил этого. От данного Учителем его доказательство отличалось одной важной деталью: Коши в своей работе (1811—1812) не воображал, что многогранники сделаны из резины. Новизна идеи его доказательства заключалась в том, что он представлял многогранник как **поверхность**, а не как **твердое тело** вместе с Евклидом, Эйлером и Лежандром. Но эту поверхность он представлял **твердой**. Когда он вынимал одну грань и оставшуюся пространственную сеть многоугольников накладывал на плоскую многоугольную сеть, то он не представлял это наложение как **растягивание**, которое могло бы **изогнуть** грани или ребра. Первым математиком, заметившим, что доказательство Коши может быть выполнено на многогранниках с изогнутыми гранями, был Крелле (1826—1827, стр. 671—672), но он тщательно придерживался **прямых ребер**. Для Кэйли, однако, казалось возможным узнать «с первого взгляда», что «теория не изменится существенно, если допустить, что ребра могут быть кривыми линиями» (1861, стр. 425). То же самое замечание было независимо сделано в Германии Листингом (1861, стр. 99) и во Франции Жорданом (1866, стр. 39).

[155] **Эта теория образования понятия соединяет образование понятий с доказательствами и опровержениями.** Полья соединяет ее с **наблюдениями**. «Когда физики начали говорить об «электричестве», или врачи о «заразе», то эти термины были смутными, неясными, спутанными. Термины, употребляемые современными учеными, вроде «электрический заряд», «электрический ток», «бактериальные» или «вирусные» заражения, несравненно яснее и определеннее. Однако между обеими этими терминологиями находится громадная масса наблюдений, множество остроумных опытов и также несколько больших открытий. Индукция изменила терминологию, выяснила понятия. Этот аспект процесса, индуктивное разъяснение понятий мы можем пояснить также и математическими примерами» (1954, т. I, стр. 55). Но даже эта ошибочная индуктивистская теория образования понятий предпочтительнее попыток сделать образование понятий **автономным**, сделать **«выяснение»** или **«объяснение»** понятий **предисловием** к любой научной дискуссии.

в проективной геометрии, когда ее доказал Жергонн, в аналитической топологии, когда ее доказал Коши, в алгебраической топологии, когда ее доказал Пуанкаре...

Пи. Совершенно верно. И теперь вы поймете, почему я не формулирую теоремы, как Альфа или Бета: «Все жергонновы многогранники являются эйлеровыми», «Все многогранники Коши являются эйлеровыми» и так далее, но скорее так: «Все жергонновы объекты являются эйлеровыми», «Все объекты Коши являются эйлеровыми» и так далее[156]. Таким образом, **я не считаю возможным ссориться не только из-за точности наивных понятий, но также из-за истинности или ложности наивных догадок**.

Бета. Но, конечно, мы можем сохранить термин «многогранник» для нашего излюбленного, рожденного доказательством термина, например, «объектов Коши»?

Пи. Если хотите, но помните, **что ваш термин уже не обозначает более того, для обозначения чего он был выдуман**, что наивное понимание исчезло и что теперь он употребляется...

Бета... для более общего, исправленного понятия!

Тета. Нет! Для совершенно отличного, нового понятия.

Сигма. Я думаю, что ваши взгляды парадоксальны!

Пи. Если под парадоксальным вы понимаете «мнение пока еще не общепризнанное»[157] , и возможно несовместимое с некоторыми из ваших укоренившихся наивных идей, то не беспокойтесь: вам только придется ваши наивные идеи заменить парадоксальными. Это может быть способом «решения» парадоксов. Но какое частное мое мнение вы имеете в виду?

Сигма. Вы помните, мы нашли, что некоторые звездчатые многогранники являются эйлеровыми, другие же нет. Мы искали доказательства, которое было бы достаточно глубоким для объяснения эйлеровости как обыкновенных, так и звездчатых многогранников...

Эпсилон. У меня оно есть[158].

Сигма. Я знаю. Но для целей аргументации представим, что у нас такого доказательства не имеется, но что в добавление к доказательству Коши для «обыкновенных» эйлеровых многогранников кто-то предлагает соответственное, но совершенно различное, доказательство для эйлеровых звездчатых многогранников. Захотели бы вы тогда, Пи, вследствие этих двух различных доказательств, предложить разбиение на два того, что мы ранее классифицировали как нечто единое? И захотели ли вы также объединить под одним именем две совершенно различные вещи только вследствие того, что кто-то нашел общее объяснение для некоторых из их свойств?

Пи. Конечно, я так бы и сделал. Ясно, что я не захотел бы назвать кита рыбой, или радио — шумовым ящиком (как могут назвать туземцы), но я не выхожу из себя, когда физик назовет стекло жидкостью. Действительно **наивную классификацию** прогресс заменяет **теоретической классификацией**, т. е. классификацией, рожденной теорией (доказательством или, если хотите, объяснением). И догадки, и понятия одинаково должны пройти через чистилище доказательств и опровержений. Наивные догадки и наивные понятия заменяются исправленными догадками (теоремами) и понятиями (рожденными доказательством или теоретическими), вырастающими из метода доказательств и опровержений. И как теоретические идеи и понятия вытесняют наивные идеи и понятия, так и теоретический язык вытесняет наивный[159].

---

[156] См. параграф 6, в.

[157] Гоббс [Hobbes (1654). Animadversions upon the Bishop's Reply, № XXI]

[158] См. прим. 111.

[159] Представляет интерес проследить постепенные изменения от достаточно наивных классификаций многогранников к высокотеоретическим. Первая наивная классификация, покрывающая не только простые многогранники, идет от Люилье: классификация по числу **полостей**,

Омега. В конце концов от наивной, случайной, чисто номинальной классификации мы придем к окончательной, истинной, реальной классификации, к совершенному языку[160].

в) Пересмотр логических и эвристических опровержений

Пи. Позвольте снова обратиться к некоторым выводам, получившимся в связи с дедуктивным угадыванием. Прежде всего возьмем проблему выбора между эвристическими и логическими контрапримерами, вставшую в дискуссии между Альфой и Тетой.

Мое изложение, я думаю, показало, что даже так называемые логические контрапримеры были эвристическими. В первоначальном понимании толкования нет несовместности между

а) все многогранники будут эйлеровыми и

б) картинная рама неэйлерова.

Если мы будем придерживаться молчаливых семантических правил нашего первоначального языка, то наши контрапримеры не будут контрапримерами. Они превратились в логические контрапримеры только от изменения правил языка при расширении понятий.

туннелей и **внутренних многоугольников** (см. примечание 134).

а) **Полости.** Первое доказательство Эйлера, а также собственное Люилье (1812—1813, стр. 174—177), основывалось на разложении **тела** при помощи обрезания одного за другим углов, или разложения на пирамиды с одной или многими точками внутри. Однако идея доказательства Коши (Люилье об этом не знал) основывалась на разложении **поверхности** многогранников. Когда теория многогранных поверхностей полностью вытеснила теорию многогранных тел, то полости стали неинтересными: **один** «многогранник с полостями» превращают в целый **класс** многогранников. Таким образом, наше старое устраняющее монстры Определение 2 стало определением, рожденным доказательством, или теоретическим, и таксономическое понятие «полости» исчезло из основного русла развития.

б) **Туннели.** Уже Листинг указал на неудовлетворительность этого понятия (см. примечание 134). Замена пришла не от какого-нибудь «объяснения» неясного понятия о туннеле, как был бы склонен ожидать последователь Карнапа, но от попытки доказать и опровергнуть наивную догадку Люилье об эйлеровой характеристике многогранников с туннелями. В течение этого процесса понятие о многограннике с туннелями исчезло и его место заняла рожденная доказательством «многосвязность» (то, что мы назвали «n-сфероидальность»). В некоторых статьях мы находим, что наивный термин удерживается для обозначения нового рожденного доказательством понятия: Гоппе число «туннелей» определяет числом разрезов, после которых многогранник остается односвязным (1879, стр. 102). Для Эрнста Штейница понятие о туннеле является уже настолько укоренившимся в теории, что он неспособен найти «существенную» разницу между наивной классификацией Люилье по числу туннелей и рожденной доказательством классификацией по многосвязности: поэтому критику Листинга классификации Люилье он считает «в высшей степени оправданной» (1914—1931, стр. 22).

в) **Внутренние многоугольники**. Это наивное понятие тоже было скоро заменено сначала кольцеобразными, а затем многосвязными гранями (см. также примечание 134). (**Заменено**, но не «объяснено», так как «кольцеобразную грань», конечно, нельзя назвать объяснением внутреннего многоугольника). Однако когда теория многогранных поверхностей была вытеснена, с одной стороны, топологической теорией поверхностей, а с другой — теорией графов, то задача о влиянии многосвязных граней на эйлерову характеристику многогранников потеряла всякий интерес.

Таким образом, из трех ключевых понятий первой наивной классификации «осталось» только одно, и то в еле узнаваемой форме — обобщенная формула Эйлера для этого этапа получила вид V — E + F = 2—2n. (Относительно дальнейшего развития см. примечание 166).

[160] Что касается наивной классификации, то номиналисты близки к истине, считая, что единственной вещью, общей для всех многогранников (или, если воспользоваться любимым выражением Витгенштейна, для всех игр), будет их имя. Но после нескольких столетий доказательств и опровержений по мере развития теории многогранников (или, скажем, теории игр) теоретическая классификация заменяет наивную, баланс меняется в пользу реалистов. Проблема универсалий должна быть пересмотрена ввиду того, что по мере роста знания язык меняется.

Гамма. Вы подразумеваете, что **все** интересные опровержения будут эвристическими?

Пи. Совершенно верно. Вы не можете поместить отдельно, с одной стороны, опровержения и доказательства, а с другой изменения в концептуальной, таксономической и лингвистической системе. Обычно при появлении «контрапримера» вы можете выбирать: или вы отказываетесь заниматься им, так как на вашем **данном** языке L1 он совсем не контрапример, или вы согласитесь изменить ваш язык при помощи расширения понятия и принять этот контрапример на вашем новом языке L2.

Дзета ...и объяснить его на L3!

Пи. В соответствии с традиционной, не меняющейся рациональностью вы должны сделать первый выбор. Наука учит нас выбирать второй.

Гамма. Иначе мы можем иметь два утверждения, которые совместны на L1, но мы переключаемся на L2, где они несовместны. Или мы можем иметь два утверждения, несовместные на L1, но мы переключаемся на L2, где они совместны. По мере роста знания меняются языки. «Каждый творческий период является одновременно периодом изменения языка»[161]. Рост знания нельзя промоделировать на любом заданном языке.

Пи. Это верно. Лингвистика занимается динамикой языка, а логика только его статикой.

г) Противоположность между теоретическим и наивным расширением понятий, между непрерывным и критическим ростом

Гамма. Вы обещали вернуться к вопросу, может или нет дедуктивное угадывание дать непрерывное изображение роста знания.

Пи. Позвольте мне сначала очертить некоторые из многочисленных **исторических** форм, которые может принять эта **эвристическая** картина.

Первое основное изображение получается, когда наивное расширение понятий намного обгоняет теорию и производит большой хаос контрапримеров: наши наивные понятия ослабляются, но теоретические понятия не заменяют их. В этом случае дедуктивное угадывание может — постепенно — справиться с залежами контрапримеров. Это будет, если хотите, непрерывное «обобщающее» изображение. Но не забывайте, что оно начинает с опровержений, что его непрерывность представляет постепенное объяснение растущей теории эвристических опровержений ее первой версии.

Гамма. Или «непрерывный» рост только указывает, что опровержения далеко впереди!

Пи. Это верно. Но может случиться, что каждое отдельное опровержение, или распространение наивных понятий, **непосредственно** влечет за собой распространение теории (и теоретических понятий), которые объясняют контрапример; тогда «непрерывность» уступает место возбуждающему

---

[161] Феликс (Felix) 1957, стр. 10. В соответствии с логическим позитивизмом исключительной задачей философии является построение «формализованных» языков, в которых искусственно замораживаются состояния науки (см. нашу цитату из Карнапа во Введении). Но такие исследования редко становятся ходовыми до того, как быстрый рост науки устраняет старую «систему языка». Наука учит нас не стремиться сохранить любую данную концептуально-лингвистическую систему, иначе она обратится в тюрьму понятий, тогда как исследователи языка заинтересованы в том, чтобы, по крайней мере, замедлить этот процесс с целью оправдать свою лингвистическую терапевтику, т. е. показать, что они имеют важнейший источник питания для науки, весьма для последней ценный, что они не вырождаются в «хорошо засушенное крючкотворство» (Эйнштейн, 1953). Аналогичную критику логического позитивизма дал Поппер; см. его книгу (1934), стр. 128, примечание 3.

чередованию опровержений, расширяющих понятия, и еще более мощных теорий, **наивных расширений понятий** и объяснительных **теоретических расширений понятий**.

Сигма. Две случайные исторические вариации на ту же самую эвристическую тему!

Пи. Ну, в действительности между ними не так уже много различия. В них обоих **сила теории лежит в способности объяснить опровержения в процессе роста**. Но есть еще **второе основное изображение дедуктивного** угадывания.

Сигма. Еще другая случайная вариация?

Пи. Да, если хотите. Однако в этой вариации растущая теория не только **объясняет**, но и **производит** ее опровержения.

Сигма. Что?

Пи. В этом случае теоретический рост обгоняет — и, конечно, исключает — наивное расширение понятий. Например, кто-нибудь начинает, скажем, с теоремы Коши без единого контрапримера на горизонте. Затем испытывают эту теорему, преобразуя многогранник всеми возможными способами: разрезая пополам, отрезая пирамидальные углы, сгибая, растягивая, раздувая... Некоторые из этих идей-испытаний приведут к идеям-доказательствам[162] (если мы получим результат, о котором уже было известно, что он верен, и затем: повернем назад, т. е. будем следовать папповой картине анализа-синтеза), но некоторые — вроде «испытания двойным склеиванием» Дзеты — приведут нас не назад к чему-либо уже известному, но к действительной новости, к какому-нибудь эвристическому опровержению испытываемого предложения — **не при помощи расширения наивного понятия, а путем расширения теоретической системы**. Такое опровержение само себя объясняет...

Йота. Как в диалектике! Испытания превращаются в доказательства, контрапримеры становятся примерами по самому методу их построения...

Пи. Почему диалектика? Испытания одного предложения превращаются в доказательство **другого** более глубокого предложения, контрапримеры первого в примеры второго. Зачем смещение называть диалектикой? Но позвольте вернуться к моей точке зрения: я не думаю, что мою вторую основную картину дедуктивного угадывания можно рассматривать — как хотел бы Альфа — как непрерывный рост знания.

Альфа. Конечно, так можно. Сравните наш метод с идеей Омеги о замене одной идеи доказательства другой, радикально отличной, более глубокой. Оба метода увеличивают содержание, но в то время как в методе Омеги операции доказательства, применимые в узкой области, **заменяются** операциями, применимыми в более широкой области, или более радикально, все доказательство заменяется другим, применимым в более широкой области, — дедуктивное угадывание **расширяет** данное доказательство добавлением операций, расширяющих его приложимость. Разве это не непрерывность?

Сигма. Это верно! Из данной теоремы мы выводим цепь еще более широких теорем! Из частного случая все более и более общие случаи! Обобщение путем дедукции[163]!

Пи. Но насытившись контрапримерами, вы когда-то признали, что **любое** увеличение содержания, **любое** более глубокое доказательство впереди себя имеет или порождает эвристические опровержения предшествующих более бедных

---

[162] Полья делает различие между «простым» и «строгим» испытаниями. «Строгое» испытание может дать «первый намек на доказательство» (1954, т. I, стр. 34—40).

[163] В **неформальной** логике нет ничего плохого в «факте, таком обыкновенном в математике и все же столь удивительном для начинающего или для философа, считающего себя передовым, а именно, что общий случай может быть логически эквивалентным частному» [Полья (1954, т. I, стр. 17)]. Также см. Пуанкаре (1902), стр. 31—33.

теорем...

Альфа. Тета распространял понятие «контрапример», чтобы покрыть эвристические контрапримеры. Вы теперь распространяете его, чтобы покрыть эвристические контрапримеры, которые никогда реально не существуют. Вы считаете, что ваша «вторая картина» полна контрапримерами и основана на распространении понятия контрапримера на контрапримеры с нулевой продолжительностью жизни, открытие которых совпадает с их объяснением! Но почему всякая интеллектуальная активность, всякая борьба за увеличение содержания в объединенной теоретической системе должна быть «критической»? Ваша догматическая «критическая позиция» затемняет исход!

Учитель. Исход спора между вами и Пи безусловно темен, потому что ваш «непрерывный рост» и «критический рост» Пи вполне совместимы. Я более интересуюсь **ограничениями**, если такие имеются, дедуктивного угадывании или «непрерывного критицизма».

д) Пределы увеличения содержания. Теоретические и наивные опровержения

Пи. Я думаю, что рано или поздно «непрерывный» рост обязательно зайдет в тупик, достигнет **точки насыщения** теории.

Гамма. Но, конечно, я всегда могу расширить некоторое понятие!

Пи. Конечно. **Наивное** расширение понятий может продолжаться, но **теоретическое** расширение имеет пределы. Опровержения при помощи наивного расширения понятий — это только поводы, побуждающие идти вперед при помощи теоретического расширения понятий. Имеются два сорта опровержений. На первый сорт мы **наталкиваемся** вследствие совпадения, или счастья, или произвольного расширения какого-нибудь понятия. Они вроде чудес, их «аномальное» поведение необъяснимо, мы принимаем их как контрапримеры bona fide (добросовестно (лат).) только потому, что привыкли принимать расширяющий понятие критицизм. Я буду называть их **наивными** контрапримерами или причудами. Далее существуют **теоретические контрапримеры**: они или производятся первоначально от расширения доказательств, или в других случаях являются причудами, которые получаются от расширенных доказательств, объясняются ими и поэтому повышаются до статуса теоретических контрапримеров. На причуды надо смотреть с большим подозрением: они могут быть не подлинными контрапримерами, а примерами из совершенно другой теории, если не простыми ошибками.

Сигма. Но что мы должны делать, когда застрянем? Когда не сможем превратить наши наивные контрапримеры в теоретические, расширяя наше первоначальное доказательство?

Пи. Мы можем снова и снова пробовать, не содержит ли наша теория какой-нибудь скрытой способности роста. Иногда, однако, могут иметься хорошие причины бросить дело. Например, как правильно указал Тета, если наше дедуктивное угадывание начинает с вершины, то мы, конечно, не можем ожидать, что оно когда-нибудь может объяснить нам лишенный вершин цилиндр.

Альфа. Значит, все-таки цилиндр был не монстром, а причудой!

Тета. Но с причудами нужно быть осторожным! Они являются **действительными** опровержениями: их нельзя подогнать под образец непрерывных «обобщений» и они могут действительно заставить нас революционизировать нашу теоретическую систему[164]...

---

[164] Кэйли (1861) и Листинг (1861) принимали всерьез расширение основных понятий теории многогранников. Кэйли определял ребро как «путь от вершины к ней же или к какой-нибудь другой

Омега. Хорошо! Для отдельной цели дедуктивного угадывания можно получить **точку относительного насыщения** — но тогда кто-нибудь найдет революционную, новую, более глубокую идею доказательства, которая имеет большую возможность объяснить. В итоге все-таки попадаешь на **окончательное** доказательство — без пределов, без точки насыщения, без причуд для его опровержения!

Пи. Что? Единая объединенная теория для объяснения **всех** явлений вселенной? Никогда! Рано или поздно мы всегда приблизимся к чему-то вроде **абсолютной точки насыщения**.

Гамма. Мне по настоящему безразлично, придем мы к этому или нет. Если контрапример может быть объяснен дешевым, **тривиальным** расширением доказательства, то я стал бы рассматривать его уже как «причуду». Повторяю: я действительно не вижу никакого особого смысла в таком обобщении «многогранника», чтобы оно включило многогранник с полостями: это не один многогранник, но класс многогранников. Я также хотел бы забыть о «многосвязных гранях» — почему бы не провести недостающие диагонали? Что касается обобщения, которое включит тетраэдры-близнецы, то я схватился бы за оружие: это годится лишь, чтобы изготовлять сложные претенциозные формулы для ничего.

Ро. Наконец-то вы снова открыли мой метод исправления монстров[165]! Он освобождает вас от узкого обобщения. Омега не должен был называть содержание «глубиной» — не всякое увеличение содержания будет увеличением глубины: подумайте о формулах (6) и (7)[166] .

Альфа. Значит, в моем ряду вы остановились на (5)?

Гамма. Да;(6) и (7) не рост, а вырождение! Вместо того чтобы идти к (6) и (7), я лучше нашел бы и объяснил какой-нибудь возбуждающий новый контрапример[167].

вершине», но допускал вырождение ребер в лишенные вершин замкнутые кривые, которые он называл «контурами» (стр. 426). У Листинга был один термин для ребер, имеют ли они две вершины, одну или совсем не имеют — это «линии» (стр. 104). Оба поняли необходимость совершенно новой теории для объяснения «причуд», которые они сами натурализовали своей либеральной системой понятий — Кэйли изобрел «Theory of Partitions of a Close». Листинг — один из великих пионеров современной топологии,— «Census of Spatial Complexes».

165 См. параграф 4, г.

166 Очень немногие математики могут отличить тривиальное от нетривиального. Это в особенности неудобно, когда отсутствие понимания нужности соединено с иллюзией о возможности построения совершенно полной формулы, которая исчерпывает все возможные случаи (см. примечание 135). Такие математики могут годами работать над «окончательным» обобщением формулы и кончить ее распространением с небольшим числом тривиальных поправок. Выдающийся математик Беккер дает забавный пример: после многолетней работы он дал формулу V — E + F = 4 — 2n + q, где n — число разрезов, необходимых для разделения многогранной поверхности на односвязные поверхности, для которых V — E + F = 1, a q — число диагоналей, которое надо добавить для приведения всех граней к односвязным (1869, стр. 72). Он был очень горд своим достижением, которое — он думал — проливает «совершенно новый свет» и даже «приводит к заключению» «дело, которым до него интересовались люди, вроде Декарта, Эйлера, Коши, Жергонна, Лежандра, Грунерта и фон Штаудта» (стр. 65). Но в его списке недостает трех имен: Люилье, Жордана и Листинга. Когда ему сказали насчет Люилье, то он опубликовал жалостную заметку, признавая, что Люилье знал все это более чем пятьдесят лет тому назад. Что касается Жордана, то он не интересовался кольцеобразными гранями, но, как оказалось, имел склонность к открытым многогранникам с границами, так что в его формуле m — число границ — фигурирует в добавлении к n (1866а, стр. 86). Тогда Беккер — в новой статье (1869а) — скомбинировал формулы Люилье и Жордана в V — E + F = 2—2n + q + m (стр. 343). Но он слишком торопился выйти из затруднения и не переварил длинную статью Листинга. И так он печально заключил свою работу (1869а), что «обобщение Листинга все же обширнее». Между прочим, позднее он пытался распространить свою формулу также и на звездчатые многогранники (1874), см. примечание 49.

167 Некоторые могут придерживаться филистерских идей о законе **уменьшения результатов от опровержений**. Гамма, например, наверняка так не думает. Мы не будем обсуждать **односторонние многогранники** (Мебиус, 1865) или **n-мерные** многогранники (Шлефли, 1852). Они подтвердили бы ожидание Гаммы, что совершенно неожиданные опровержения,

Альфа. По-видимому, вы все-таки правы. Но кто же решит, где остановиться? Глубина — дело только вкуса.

Гамма. А почему бы не иметь математических критиков наподобие литературных для развития математического вкуса общественной критикой? Мы даже могли бы задержать волну претенциозных тривиальностей в математической литературе[168].

Сигма. Если мы остановимся на (5) и превратим теорию многогранников в теорию триангулированных сфер с ручками, то как вы сможете в случае надобности справиться с тривиальными аномалиями, вроде объясненных в (6) и (7)?

Мю. Детская игра!

Тета. Правильно. Тогда мы остановимся на минуту на (5). **Но можем ли мы остановиться?** Расширение понятий может опровергнуть (5)! Мы можем игнорировать расширение понятия, если оно дает контрапример, обнаруживающий бедность содержания нашей теоремы. Но если расширение дает контрапример, который ясно показывает ее ложность, то как тогда? Мы можем отказаться от применения наших увеличивающих содержание **Правила 4** или **Правила 5** для объяснения причуды, но нам придется применить наше сохраняющее содержание **Правило 2** для устранения опровержения при помощи причуды.

Гамма. Вот это так! Мы можем отбросить «дешевые» **обобщения**, но вряд ли можем отбрасывать «дешевые» **опровержения**.

Сигма. Почему бы не построить устраняющее монстры определение «многогранника», добавив новое условие для каждой причуды?

Тета. В обоих случаях снова вернется наш старый кошмар, порочная бесконечность.

Альфа. Пока вы увеличиваете содержание, вы развиваете идеи, делаете математику; после этого вы выясняете понятия, вы делаете лингвистику. Почему не остановиться совсем, когда перестаешь увеличивать содержание? Зачем попадаться в ловушку порочных бесконечностей?

Мю. Не надо опять сталкивать математику с лингвистикой! Наука никогда не выигрывает от таких диспутов.

Гамма. Слово «никогда» скоро обратится в «скоро». Я целиком за возобновление нашей старой дискуссии.

Мю. Но мы уже кончили тупиком. Или кто-нибудь может сказать нам что-нибудь новое?

Каппа. Я думаю, что могу.

9. Как критика может математическую истину превратить в логическую

а) Бесконечное расширение понятий уничтожает смысл и истину

расширяющие понятия, всегда могут дать целой теории новый — возможно, революционный — толчок.

[168] Полья указывает, что узкое, дешевое обобщение «в настоящее время гораздо более в моде, чем было раньше. Маленькую идею оно разводит большой терминологией. Автор обычно предпочитает даже эту маленькую идею заимствовать от кого-нибудь другого, воздерживается от добавления каких-нибудь оригинальных наблюдений и избегает решения какой-нибудь задачи, кроме небольшого числа задач, появляющихся от затруднений в его собственной терминологии. Было бы очень легко привести примеры, но я не хочу из людей делать противников» (1954, т. I, стр. 30). Другой из самых выдающихся математиков нашего века Нейман также предупреждал против «опасности вырождения», но думал, что это не будет так уж плохо, «если дисциплина будет под влиянием людей с исключительно хорошо развитым вкусом» (1947, стр. 196). Но все-таки сомневаешься, будет ли «влияние людей с исключительно хорошо развитым вкусом» достаточно для спасения математики в нашем веке: «публикуй или погибай».

Каппа. Альфа уже сказал, что наш «старый» метод приводит к порочной бесконечности[169] . Гамма и Ламбда ответили надеждой, что поток опровержений может иссякнуть[170]; но теперь, когда мы понимаем механизм успеха опровержений — расширение понятий,— мы знаем, что их надежда была тщетной. Для всякого предложения всегда найдется некоторое достаточно узкое толкование его терминов, которое окажется истинным, и некоторое достаточно широкое, которое окажется ложным. Какое толкование предполагается, и какое нет, зависит, конечно, от наших намерений. Первое толкование можно было бы назвать **догматическим, подтвердительным ил и оправдательным толкованием**, а второе **скептическим, критическим или опровергательным**. Альфа назвал первое конвенционалистской стратагемой[171], но теперь мы видим, что второе будет таким же. Вы все осмеяли догматическое толкование Дельтой наивной догадки[172], а затем догматическое толкование Альфой теоремы[173] . Но расширение понятий опровергает **всякое** утверждение и вообще не оставит истинного утверждения.

Гамма. Постойте. Правда, мы расширили понятие «многогранник», затем разорвали его и отбросили; как указал Пи, наивное понятие «многогранник» уже не фигурирует больше в теореме.

Каппа. Но тогда вы начнете расширять термин в теореме — теоретический термин, не правда ли? Вы сами решили расширить «односвязную грань» так, чтобы включить круг в боковую поверхность цилиндра[174]. Вы подразумевали, что интеллектуальная честность требует подставить шею, добиться почетного статуса опровергаемости, т. е. сделать возможным толкование опровергателя. Но при наличии расширения понятий опровергаемость означает опровержение. Таким образом, вы скользите по бесконечному склону, опровергая **каждую** теорему и заменяя ее более «строгой» — такой, ложность которой еще не выявлена. Но **вы никогда не выйдете из ложности**.

Сигма. А что, если мы остановимся на некотором пункте, примем оправдательные толкования и не будем трогаться дальше от истины или от той частной лингвистической формы, в которой была выражена истина?

Каппа. Тогда вам придется отражать контрапримеры, расширяющие понятия, вместе с устраняющими монстры определениями. Таким образом, вы будете скользить по другому бесконечному склону: вы будете принуждены принимать каждую «особую лингвистическую форму» вашей истинной теоремы, которая не будет достаточно точной, и вы будете принуждены включать в нее все более и более «строгие» определения, выраженные в терминах, неясность которых еще не разоблачена. Но **вы никогда не выйдете из неясности**.

Тета (в сторону). Что же плохо в эвристике, где неясность является ценой, которую мы платим за рост?

Альфа. Я сказал вам: точные понятия и непоколебимые истины живут только в мысли, но не в языке!

Гамма. Позвольте мне сделать вам вызов, Каппа. Возьмите теорему, как она стояла после того как мы учли цилиндр: «Для всех простых объектов с односвязными гранями, у которых ребра оканчиваются в вершинах, V—E+F = 2». Как вы опровергнете **это** методом расширения понятий?

Каппа. Прежде всего я вернусь к определяющим терминам и произнесу предложение полностью. Затем я решу, какие понятия надо расширить. Например, «простой» стоит вместо «могущий быть растянутым в плоскости после отнятия

---

169 См. реплику Альфы.

170 См. ответ на реплику Альфы.

171 В действительности Альфа не употреблял явно этот термин Поппера.

172 См. параграф 4,б.

173 См. главу 5.

174 См. гл. 5.

одной грани». Я растяну термин «растягивание». Возьмите уже обсужденные тетраэдры-близнецы, имеющие общее ребро (рис. 6,а). Этот многогранник будет простым, его грани—односвязными, но V—E+F = 3. Итак, наша теорема неверна.

Гамма. Но эти близнецы-тетраэдры **не** будут простым многогранником!

Каппа. Конечно, будут простым. Отнимая любую грань, я могу растянуть его на плоскости. Мне придется только быть осторожным, когда я подойду к критическому ребру, чтобы ничего не разорвать, открывая по этому ребру второй тетраэдр.

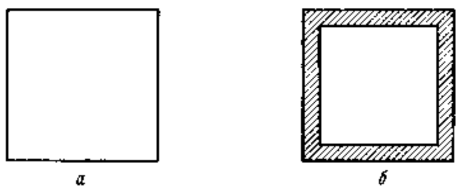


Рис. 24

Гамма. Но это же не растягивание! Вы **режете** — или **расщепляете** — ребро на два ребра. Вы, конечно, не можете поместить одну точку в двух точках: **растягивание является дважды непрерывным однозначным отображением**.

Каппа. **Определение 9**? Боюсь, что это узкое, догматическое толкование «растягивания» не удовлетворит моему здравому смыслу. Например, я вполне могу в воображении растянуть квадрат (рис. 24,а) в два вложенных друг в друга квадрата, если растяну его контурную линию (рис. 24,6). Назовете ли вы это растягивание разрезом или расщеплением только потому, что оно не представляет «дважды непрерывного однозначного отображения». Между прочим, я удивляюсь, почему вы не определили растягивание как преобразование, которое оставляет F, E и F неизменными, и покончили бы с этим?

Гамма. Верно, вы опять выиграли. Я должен или согласиться с вашим опровергательным толкованием «растягивания» и расширить мое доказательство, или найти более глубокое, или включить лемму, или ввести определение, устраняющее монстры. Однако в каждом из этих случаев я всегда буду делать более и более ясными мои определяющие термины. Почему я не должен прийти к такой точке, для которой значение терминов будет настолько кристально ясным, что может быть только одно-единственное толкование, как в случае с 2 + 2=4? Здесь нет ничего эластичного в смысле этих терминов и ничего опровержимого в истине этого определения, которое вечно сияет в естественном свете разума.

Каппа. Мутный свет!

Гамма. Расширьте, если вы можете.

Каппа. Но это же детская игра! В некоторых случаях два и два составляют пять. Предположим, что просим прислать две вещи, из которых каждая весит два фунта; они были присланы в ящике, весящем один фунт; тогда в этой упаковке два фунта и два фунта составляют пять фунтов!

Гамма. Но вы получаете пять фунтов, складывая три груза, 2 и 2 и 1!

Каппа. Верно, наша операция «2 и 2 составляют 5» не представляет сложения в первоначальном смысле этого слова. Но простым расширением смысла сложения мы можем сделать этот результат истинным. Наивное сложение представляет очень частный случай упаковки, когда вес покрывающего материала равен нулю. Нам нужно включить эту лемму в догадку в качестве условия: наша исправленная догадка будет: «2+2 = 4 для «невесомого» сложения»[175]. Вся история

[175] См. Felix (1957), стр. 9.

алгебры представляет ряд таких расширений понятий и доказательств.

Гамма. Я думаю, что вы «растягиваете» слишком далеко. В следующий раз вы истолкуете «плюс» как «косой крест» и будете рассматривать это как опровержение! Или вы истолкуете «все» как «не» в положении: все многогранники суть многогранники»! Вы расширяете понятие расширения понятий! Мы должны отграничить опровержение при помощи **рационального расширения** от «опровержения» при помощи **иррационального расширения**. Мы не можем позволить вам расширить любой термин так, как вы этого хотите.

Мы должны закрепить понятие контрапримера в кристально ясных терминах!

Дельта. Даже Гамма обратился в устранителя монстров: теперь для опровержения расширением понятий он хочет получить определение, устраняющее монстры. **Разумность** в конце концов зависит от неэластических, точных понятий[176] .

Каппа. **Но таких понятий не существует! Почему не принять, что наша способность уточнять смысл наших выражений ничтожна и поэтому наша способность доказывать тоже ничтожна?** Если вы хотите, чтобы математика имела смысл, то вы должны отказаться от достоверности. Если вы хотите достоверности, избавьтесь от смысла. Вы не можете иметь и то и другое. **Тарабарщина безопасна от опровержений, имеющие смысл предложения могут быть опровергнуты расширением понятий.**

Гамма. Тогда ваши последние утверждения тоже могут быть опровергнуты — и вы знаете это. «Скептики — это не секта людей, убежденных в том, что они говорят, это – секта лжецов»[177].

Каппа. Ругательства — последнее прибежище разума!

б) Смягченное расширение понятий может превратить математическую истину в логическую

Тета. Я думаю, что Гамма прав относительно необходимости проведения раздельной линии между рациональным и иррациональным расширением понятий. Действительно, расширение понятий зашло слишком далеко и из скромной рациональной деятельности превратилось в радикальную и иррациональную.

Первоначально критика сосредоточивалась исключительно на **небольшом расширении одного частного понятия**. Оно должно было быть **небольшим**, чтобы мы не могли его заметить; если бы его действительная — расширяющая — природа была увидена, то оно могло не быть принятым как законная критика. Оно сосредоточивается на **одном частном** понятии, как в случае наших несофистических универсальных предложений «**Все А суть В**». В таком случае критик хочет найти слегка расширенное А (в нашем случае **многогранник**), которое не будет В (в нашем случае **эйлеров**).

Но Каппа заострил это в двух направлениях. Во-первых, чтобы подвергнуть расширяющей понятие критике **более чем одну** составную часть предложения, находящегося под ударом. Во-вторых, превратить расширение понятий из тайной и даже скромной деятельности в **открытое деформирование** понятия вроде превращения «все» в «не». Здесь в качестве опровержения принимается любой имеющий смысл перевод терминов атакуемого предложения, который делает теорему ложной. Тогда я сказал бы, что **если предложение не может быть опровергнуто в отношении своих составных частей: a, b,..,** то оно будет логически истинным для этих составных частей[178]. Такое предложение представляет

---

[176] Требование Гаммы кристально ясного определения «контрапримера» равносильно требованию кристально ясных, неэластических понятий в метаязыке в качестве условия разумной дискуссии.

[177] Арно (Arnauld), 1724, стр. XX—XXI.

[178] Это слегка перефразированная версия определения Больцано логической истины (1837, № 147).

конечный результат длинного критико-спекулятивного процесса, в течение которого смысловой груз некоторых терминов полностью перенесен на остальные термины и на форму теоремы.

Теперь все, что говорит Каппа, сводится к тому, что не существует предложений, логически истинных для **всех** их составных частей. Но могут быть предложения, логически истинные по отношению к **некоторым** составным частям, так что поток опровержений может быть открытым снова, если будут добавлены новые составные части, могущие быть расширенными. Если мы доведем дело до конца, то кончим иррационализмом,— но мы в этом не нуждаемся. Теперь, где же должны мы провести граничную линию? Мы можем допустить расширение понятий только для особо выделенной подгруппы составных частей, которые станут первыми мишенями для критики. Логическая истинность не будет зависеть от их значения.

Сигма. Таким образом, в конце концов мы приняли пункты Каппы: мы сделали истину не зависящей от значения по крайней мере **некоторых** из терминов!

Тета. Это верно. Но если мы хотим разбить скептицизм Каппы и избегнуть его порочных бесконечностей, то мы непременно должны остановить расширение понятий в той точке, где оно перестает быть орудием роста и становится орудием разрушения: может быть, нам придется определить, какими будут термины, значение которых может быть расширено только за счет уничтожения основных принципов рациональности[179].

Каппа. Можем ли мы расширять понятия в вашей теории критической рациональности? Или будет ли это очевидно истинным, формулированным в не допускающих расширения точных терминах, которые не нуждаются в определении? Не кончится ли ваша теория критицизма «обращением к суду»? Можно ли критиковать все, кроме вашей теории критицизма, вашей «метатеории»[180] ?

Омега (к Эпсилону). Мне нравится этот отход от истины к рациональности. **Чьей** рациональности? Я чувствую конвенционалистскую инфильтрацию.

Бета. О чем вы говорите? Я понимаю «мягкий образец» Теты расширения понятий. Я также понимаю, что расширение понятий может атаковать более чем один термин: мы видели это, когда Каппа расширял «расширение» или когда Гамма расширял «все»...

Сигма. Но Гамма, конечно, расширял «односвязные»!

Бета. Ну нет. «Односвязные» — это сокращение — он расширил только термин «все», который попался среди определяющих слов[181] .

Почему Больцано предложил свое определение 1830-х годов, представляет вопрос, заставляющий удивляться в особенности потому, что его работа предвосхищает понятие модели, одно из величайших нововведений математической философии XIX в.

[179] Математический критицизм XIX в. расширял все большее и большее число понятий и переносил смысловой груз большего и большего числа терминов на **логическую форму предложений** и на значение немногих (пока еще) не расширенных терминов. В 1930-х годах этот процесс, по-видимому, стал затихать, и демаркационная линия между нерасширимыми («логическими») терминами и расширимыми («дескриптивными»), по-видимому, сделалась устойчивой. Список, содержащий небольшое число логических терминов, получил широкое признание, так что общее определение логической истинности сделалось возможным: логическая истинность не была уже правильной только по отношению к некоторому списку составных частей (см. Тарский, 1935). Однако сам Тарский был удивлен этой демаркацией и сомневался, по придется ли ему в конце концов возвратиться к релятивизированному понятию контрапримера и, следовательно, логической истинности (стр. 420) — вроде Больцано, о котором, кстати, Тарский не знал. Наиболее интересным результатом в этом направлении была работа Поппера (1947—1948), из которой следует, что нельзя отказываться от дальнейших логических констант, не отказываясь также от некоторых основных принципов рациональной дискуссии.

[180] «Обращение к суду» — выражение Бэртли (Bartley, 1962). Он исследовал задачу, возможна ли рациональная защита критического рационализма главным образом по отношению к религиозному знанию, но характер задачи во многом совершенно таков же и по отношению к «математическому» знанию.

[181] См. параграф 8, а. Гамма действительно хотел устранить некоторый смысловой груз у «все», так,

Тета. Вернемся к делу. Вы чувствуете себя несчастными из-за «открытого» радикального расширения понятий?

Бета. Да. Никто не захочет принять эту последнюю выпущенную марку за настоящее опровержение! Я хорошо вижу, что мягкая расширяющая понятия тенденция эвристического критицизма, раскрытая Пи, представляет наиболее важный двигатель математического роста. Но математики никогда не примут эту последнюю дикорастущую форму опровержения!

Учитель. Вы неправы, Бета. Они **приняли** ее и их принятие было поворотным пунктом в истории математики. **Эта революция в математическом критицизме изменила понятие о математической истине, изменила стандарты математического доказательства, изменила характер математического роста**[182]. Но теперь закроем на данный момент нашу дискуссию; об этой новой стадии мы поговорим в другое время.

Сигма. Но ведь ничего не установлено. Мы не можем остановиться **теперь**.

Учитель. Сочувствую вам. Эта последняя стадия даст важные источники пищи для нашей дискуссии[183]. Но научное исследование «начинается и кончается проблемами»[184]. (Покидает классную комнату).

Бета. Но вначале у меня не было проблем! А теперь у меня нет ничего, **кроме** проблем!

Литература

Abel N. H. (1826). Письмо к Ганстину, в «Oeuvres». Sylow, Lie (Eds.), Christiania, vol. II, 1881, 263—265.

Aetius (ок. 150). Placita.

Alexandrov A. D. (1956). Введение к Aleksandrov, Kholmogorov, Lavrentiev (eds). Mathematics, its content, methods and meaning. Moscow; английский перевод S. H. Goura.— Am. Math. Soc., Rhode Island, 1962.

Ambrose A. (1959). Proof and the theorem, proved.—Mind, N. S., **67**, 435-445.

Arber A. (1954). The mind and the eye. Cambridge.

Arnauld A. (1724). L'art de penser. Paris.

Ba1tzer R. (1860—62). Die Elemente der Mathematik I—II. Leipzig. Bartley W. W. (1962). Retreat to commitment. N. Y.

Becker J. C. (1869). Ueber Polyeder. Z. Math, und Physik, 14, 65-76.

Becker J. C. (1869a). Nachtrag zu dem Aufsatze iiber Polyeder.— Z. Math, und Physik., 14, 337—433.

Becker J. C. (1874). Neuer Beweis und Erweiterung eines Fundamentalsatzes uber Polyederflachen.— Z. Math, und Physik, 19, 459—460.

Bell E. T. (1945). The Development of mathematics, 2nd ed. N. Y.

Berard J. B. (1818—19). Sur le nombre des racines imaginaries des equations; en reponse aux articles de MM. Tederat et Servois.— Ann. de math, purcs et appl., 9, 345—372.

Bernays P. (1947). Review of Polya's «How to solve it».—Dialectica, 1, 178—188.

Bolzano B. (1837). Wissenschaftslehre. Versuch einer ausfuhrlichen und gro'ssenteils neuen Darstellung der Logik mit steter Riicksicht auf deren bisherige Bearbeiter. Sulzbach.

Braithwaite R. B. (1953). Scientific explanation. Cambridge.

Brouwer L. E. J. (1952). Historical background, principles and methods of intuitionism.—South African J. Sci., 49 (1952—53), 139-146.

чтобы больше не применять его только к непустым классам. Скромное расширение понятия «все» устранением «экзистенциального значения» из его смысла и поэтому превращение пустого множества из монстра в обыкновенное **буржуазное** множество было важным событием, связанным не только с булевским теоретико-множественным переистолкованием аристотелевой логики, но также и с появлением понятия о пустом удовлетворении от математической дискуссии.

[182] Понятия критицизма, контрапримера, следствия, истины и доказательства неразделимы; когда они меняются, то **первичное изменение происходит в понятии критицизма**, за которым следуют изменения остальных.

[183] См. Lakatos (1962).

[184] Popper (1963b), стр. 968.

Carnap R. (1937). The logical syntax of language. N. Y. London (просмотренный перевод «Logische Syntax der Sprache». Vienna, 1934).

Cauchy A. L. (1811). Recherches sur les polyedres.—J. de 1'Ecole Polytechnique, 1813, 9, 68—86. (Прочитано в февр. 1811 г.)

Cauchy A. L. (1812). Sur les polygones et les polyedres.—J. de 1'Ecole Polytechnique, 1813, 9, 87—98. (Прочитано в январе 1812 г.)

Cauchy A. L. (1821). Cours d'Analyse. Paris.

Cayley A. (1859). On Poinsot's four new regular solids.— The London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag. and J. Sci., 4th ser., 17, 123—128.

Cayley A. (1861). On the partitions of a close.—The London, Edinburgh and Dublin Philos, Mag. and J. Sci., 4th ser., 21, 424—428.

Church A. (1956). Introduction to mathematical logic. I. Princeton.

Clairaut A. C. (1741). Elements de Geometrie. Paris.

Copi I. M. (1949). Modern logic and the synthetic a priori.— J. Philos., 46, 243—245.

Copi I. M. (1950). Goedel and the synthetic a priori: a rejoinder.- J. Philos., 47, 633-63C.

Crelle A. L. (1826—27). Lehrbuch der Elemente der Geometrie. Berlin, I—II.

Curry H. B. (1951). Outlines of a formalist philosophy of mathematics. Amsterdam.

Darboux C. (1874). Письмо к Houel, цитируется у F. Rostand: Souci d'exactitude et scrupules des mathematiciens.— Paris, 1960, 11.

Darboux C. (1874a). Письмо к Houel, цитируется у F. Rostand: Souci d'exactitude et scrupules des mathematiciens. Paris, 1960, 194.

Darboux C. (1883). Письмо к Houel, цитируется у F. Rostand: Souci d'exactitude et scrupules des mathematiciens. Paris, 1960, 261.

Denjoy A. (1919). L'orientation actuelle des mathematiques.—Revue du mois, 20, 19—28.

Descartes R. (1628). Regulae ad Directionem Ingenii. Цитируется по переводу Haldane — Ross.

Descartes R. (ок. 1639). De solidorum elementis, впервые опубликовано Foucher de Careil: Oeuvres inedites de Descartes, II. Paris, 1860, 214—234. Значительно исправленный текст, см. Adam — Tannery. Oeuvres de Descartes, vol. X. Paris, 1908, 257-278.

Dieudonne J. (1939). Les methodes axiomatiques modernes et les fondements des mathematiques. — Rev. sci., 77, 225—231.

Diogenes Laertius (ок. 200). Жизнеописания греческих философов.

Einstein A. (1953). Письмо к P. A. Schilpp, опубликовано в Schilpp: The Abdication of Philosophy, Kant Studien, 51, 1959—60, 490—91

Euler L. (1750). Elementa Doctrinae Solidorum. Novi commenta-rii academiae scientiarum Petropolitanae (1752—1753), 1758, 4, 109—140. (Прочитано в ноябре 1750 г.)

Euler L. (1751). Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita, Novi commen-tarii academiae scientiarum Petropolitanae (1752—1753), 1758, 4, 140—160. (Прочитано в сентябре 1751 г.).

Euler L. (1753). Specimen de usu observationum in mathesi pura. Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, (1756— 57), 1761, 6, 185—230. Издательское резюме, ibid., 19—21.

Eves and Newsom (1958). An introduction to the foundations and fundamental concepts of mathematics. N. Y.

Felix. (1957). L'aspect moderne des mathematiques. Paris.

Forder H. G. (1927). The foundations of euclidean geometry. Cambridge.

Frechet M. (1928). Les espaces abstraits. Paris.

Frechet M. (1938). L'analyse generale et la question de fondements. В книге Gonseth (изд.). Les Entretien de Zurich, 1941.

Frege C. (1893). Grundgesetze der Arithmetik, I. Jena.

Gamow C. (1953). One, two, three... infinity. N. Y.

Goldschmidt R. (1933). Some aspects of evolution.— Science, 78, 539-547.

Grunert J. A. (1827). Einfacher Beweis der von Gauchy und Eu-ler gefundeaen Satze von Figurennetzen und Polyedern.— J. die reine und angew. Math., 2, стр. 367.

Hardy G. H. (1928). Mathematical proof.—Mind. N. S., 38, 1—25,

Haussner R. (ed.) (1906). Abhandlungen iiber die regelmassigen Sternkorper.— Ostwald's Klassiker der Wissenschaften, N 151. Leipzig.

Heath Th. L. (1925). The thirteen books of Euclid's elements, второе издание. (Первое издание появилось в 1908 г.).

Hempel C. G. (1945). Studies in the logic of confirmation, I—II.— Mind, N. S., 54, 1-26, 97-121.

Hermite C. (1893). Lettre a Stieltjes, 20 mai 1893, Correspondence d'Hermite et de Stieltjes, Publiee par les soins de B. Baillaud et H. Bourget, I—II. Paris, 1905, vol. II, 317—319.

Hessel F. Ch. (1832). Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyedern.— J. die reine und angew. Math. 8, 13—20.

Hetting A. (1939). Les fondements des mathematiques du point de vue intuitioniste. Appendix to F.

Gonseth: Philosophic mat-hematique. Paris.
Hey ting A. (1956). Intuitionism. An introduction. Amsterdam.
Hilbert D., Cohn-Vossen S. (1956). Geometry and imagination. N. Y. Оригинальное немецкое издание: Anschauliche Geo-metrie. Berlin, 1932.
Hobbes T. (1651). Leviathan, or the matter, form and power of a Commonwealth, Ecclesiastical and Civil. London.
Hobbes T. (1656). The questions concerning liberty, necessity and chance, clearly stated and debated between Dr. Bramhall, Bishop of Derry, and Thomas Hobbes of Malmesbury. London.
Holder O. (1924). Die mathematische Methode. Berlin.
Hoppe R. (1879). Erganzung des Eulerschen Satzes von den Polyedern.—Arch. Math, und Physik, 63, 100—103.
Husserl E. (1900). Logische Untersuchungen, I. Halle.
Jonquieres E. de (1890a). Note sur un point fondamental de la theorie des polyedres.— Comptes rendus des seances de L'Acade-mie des Sciences, 170, 110—115.
Jonquieres E. (1890b). Note sur le theoreme d'Euler dans la theorie des polyedres.— Comptes rendus des seances de ГAca-demie des Sciences, 110, 169—173.
Jordan C. (1866). Recherches sur les polyedres.—J. die reine und angew. Math., 57, 22—85.
Jordan C. (1866a). Resume de recherches sur la symetrie des polyedres non Euleriens.— J. die reine und angew. Math., 57, 86-91.
Kant I. (1781). Kritik der reinen Vernunft. Riga.
Kepler I. (1619). Harmonices mundi. Lincii.
Lakatos I. (1961). Essays in the Logic of mathematical discovery, Ph. D. Dissertation. Cambridge.
Lakatos I. (1962). Infinite Regress and the foundations of mathematics, Aristotelian society supplementary volume. 36, 155—184.
Landau E. (1930). Grundlagea der Analysis. Leipzig.
Lebesgue H. (1923). Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan. Перепечатано в H. Lebesgue: Notices d'Histoire des Mathematiques. Geneve, 1958, 40—65.
Lebesgue H. (1928). Lemons sur 1'integration. Paris. Второе, увеличенное издание первоначального 1903 г.
Legendre (1794). Elements de geometric. Paris. Нумерация страниц по изданию 1809 г.
Lhuilier S. A. J. (1812—1813). Memoire sur polyedrometrie: con-tenant une demonstration directe du Theoreme d'Euler sur les polyedres, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce theoreme est assujetti.— (Extrait) par M. Gergonne.— Annal. math, pures et appl., 3, 169—191. Lhuilier S. A. J. (1812—1813a). Memoire sur les solides reguliers.— Ann. math, pures et appl., 3, 233—237.
Listing J. B. (1861). Der Census raumlicher Complexe.—Abhandl. Koniglichen Gesellschaft Wiss. Gatingen, 10, 97—182. (Прочитано в декабре 1861 г.)
Matthiessen L. (1863). Ueber die scheinbaren Einschrankungen des Euler'schen Satzes von den Polyedern.— Z. Math, und Physik, 8, 449—450.
Meister A. L. F. (1769—1770). Generalia de genesi figurarum planarum et inde pendentibus earum affectionibus, Novi Com-mentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis, 1771, 1, 144—180.
Moebius A. F. (1827). Der baryzentrische Calcul. Leipzig.
Moebius A. F. (1865). Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders.— Ber. Konigl. Sachs. Ges. d. Wiss., Math.-phys. Klasse, 17, 31—68.
Moore E. H. (1902). On the foundations of mathematics.—Science, 17 (1903), 401-416.
Munroe M. E. (1953). Introduction to Measure and Integration.Cambridge, Mass.
Neumann J., von (1947). The mathematician. B Heywood (ed.); The works of the mind. Chicago (Перепечатано в «Collected works», vol. I, 1961, 1—9).
Newton I. (1717). Optics, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light, second Ed. London.
Olivier L. (1826). Bemerkungen iiber Figuren, die aus beliebigen von geraden Linien umschlossenen Figuren zusammengesetzt sind.— J. die reine und angew. Math., I, 1826, 227—231.
Pascal B. (1657—1658). Les Reflexions sur la Geometric en general (De 1'esprit geometrique et de 1'art de persuader).
Peano C. (1894). Notations de logique mathematique. Turin.
Poincare H. (1893). Sur la generalisation d'un theoreme d'Euler relatif aux polyedres.— Comptes rendus des seances de 1'Acade-mie des Sciences, 117, 144.
Poincare H. (1899). Complement a l’Analysis Situs. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 13, 285—343.
Poincare H. (1902). La Science et 1'Hypothese. Paris. Авторизованный английский перевод В. Halsted: The foundations of science, 27—197. Lancaster, Pa, 1913.
Poincare H. (1905). La Valeur de la Science, Paris; авторизованный перевод G. B. Halsted: The foundations of science, 27—197. Lancaster, Pa, 1913.
Poincare H. (1908). Science et Methode. Paris. Авторизованный английский перевод G. B.

Halsted: foundations of science, 359— 546. Lancaster, Pa, 1913.
Poinsot L. (1809). Memoire sur les polygones et les polyedres.— «J. de 1'Ecole Polytechnique», 1810, 4, 16—48. (Прочитано в июле 1809 г.)
Poinsot L. (1858). Note sur la theorie des polyedres.—Comptes rendus de 1'Academie des Sciences, 46, 65—79.
Po1ya G. (1945). How to solve it. Princeton.
Polya G. (1954). Mathematics and plausible reasoning, I—II. London.
Polya G. (1962a). Mathematical discovery, I. N. Y.
Polya G. (1962b). The teaching of mathematics and the biogene-tic law. «The scientist speculates» (ed. L. J. Good). London, 352—356.
Polya G., Szego G. (1925). Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis. Berlin.
Popper K. R. (1934). Logik der Forschung. Vienna (Английский перевод: The logic of scientific discovery. London, 1958).
Popper K. R. (1945). The open society and its enemies. London.
Popper K. R. (1947—1948). Logic without assumptions.—Aristotelian Soc. Proc. 47, 251—292.
Popper K. R. (1952). The nature of philosophical problems and their roots in science.— Brit. J. Philos. Sci., 3, 124—156. Перепечатано в 1963a.
Popper K. R. (1957). The poverty of Historicism. London.
Popper K. R. (1963a). Conjectures and refutations. London.
Popper K. R. (1963b). Science: problems, aims, responsibilites.— Federation Am. Soc. Exp. Biol. Federation Proc., 22, 961—972.
Quine W. V. O. (1951). Mathematical logic, пересмотренное издание. Cambridge, Mass. (1-е издание 1940).
Raschig L. (1891). Zum Eulerschen Theorem der Polyedrometrie. Festschrift des Gymnasium. Schneeberg.
Reichardt H. (1941). Losung der Aufgabe 274,—Jahresberichte Dtsch. Math. Vereinigung, 51, 23.
Riemann B. (1851). Grundlagen fur eine allgemeine Theorie der Functionen einer veranderlichen complexen Grosse, Inaugural dissertation. Gottingen.
Robinson R. (1936). Analysis in Greek Geometry.—Mind, 45, 464—73.
Robinson R. (1953). Plato's earlier dialectic. Oxford.
Rudin W. (1953). Principles of mathematical analysis. N. Y.
Russel B. (1901). Recent work in the philosophy of mathematics.— Int. Monthly, 3.
Russel B. (1903). Principles of mathematics. London.
Russel B. (1918). Mysticism and logic. London.
Saks S. (1933). Theorie de Fintegrale. Warsaw. Английский перевод второго издания: Theory of the integral. Warsaw, 1937.
Schlafli L. (1852). Theorie der vielfachen Kontinuitat. Посмертно опубликовано в «Neue Denkschrifton der allgemeinen Schwei-zerischen Gesellschaft fur die gesamten, Naturwissenschaften», 38. Zurich, 1901.
Schroder E. (1892). Ueber dio Vielecke von gebrochener Seiton-zahl oder die Bedeutung der Stern-polygone in der Geometric.— Z. Math, und Physik., 7, 55—64.
Seidel Ph. L. (1847). Note iiber eine Eigenschaft der Reihen, weiche discontinuirliche Functionen darstellen. «Abhandl. Math.-Phys. Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie Wiss., 5, 381—394.
Sextus Empiricus (ок. 190). Против логиков.
Somruerville D. M. Y. (1929). An introduction to the geometry of n-dimensions. London.
Steiner J. (1826). Leichter Beweis eines stereometrischen Satzes von Euler.— J. die reine und angew. Math., 1, 364—367.
Steinhaus H. (1960). Mathematical snapshots. N. Y., Revised and enlarged edition.
Steeinitz E. (1914—1931). Polyeder and Raumeinteilungen. B W. Fr. Meyer, H. Mohrmann (eds.): Encyklopadie der mathema-tischen Wissenschaften. Leipzig, Bd. Ill, AB. 12. Szabo A. (1958). Deiknymi als mathematischer Terminus fur «Beweisen».—Maia, N. S., 10, 1—26.
Szabo A. (I960). Anfange des euklidischen Axiomensystems.—Arch. History. Exact Sci., 1, 1960, 37—106.
Tarski A. (1930a). Uber einige fundamental Begriffe der Meta-mathematik.— Comptes rendus des seances de la Societe et des Lettres de Varsovie, 23, Cl. Ill, 22—29. На английском языке опубликовано в Tarski: Logic, semantics, metamathematics. Oxford, 1956, pp. 30—37.
Tarski A. (1930b). Fundamental Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften, I.— Monatshefte Math, und Physik, 37, 361—404. На английском языке опубликовано в Tarski: Logic, semantics, metamathematics. Oxford, 1956, 60—109.
Tarski A. (1935). On the concept of logical consequence. Опубликовано в Tarski: Logic, semantics, metamathematics. Oxford, 1956, 409—420. Доклад был прочитан в 1935.
Tarski A. (1941). Introduction to Logic and to the methodology of deductive sciences. N. Y. Second ed., 1946. Это частично измененный и расширенный перевод «On mathematical logic and deductive

method» (польский оригинал опубликован в 1936, немецкий перевод в 1937).
Turquette A. (1950). Godel and the synthetic a priori,—J.Philos. 47, 125—129.
Waerden B. L., van der (1941). Topologie und Uniformisierung der Riemannsches Flachen.— Bericnte der Math. Phys. Klasse der Sachsischen Akademie der Wissenschaften. Leipzig, 93, 148—160.
Whitehead A.N., Russell B. (1910—1913). Principia mathe-matica, vol. I, 1910, vol. II; 1912; vol. III, 1913. Cambridge.
Wilder R. I. (1944). The nature of mathematical proof.— Am. Math. Monthly, 51, 309—323.
Zacharias M. (1914—1931). Elementargeometrie. B W. Fr. Meyer, H. Mohrmann (eds.): Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften, III, AB, 9. Leipzig.

Примечание Г. Копылова, превратившего текст книги в файл:

«С тех пор, как вышла книга Лакатоса в переводе И.Веселовского, многое изменилось: фамилия Полья теперь переводится как Пойа, многие источники, указанные в списке литературы, переведены на русский язык (другие труды Лакатоса, Поппер, Тарский, Пуанкаре и пр.). Но я не стал ничего менять, кроме очевидных погрешностей перевода.»