

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Теорема Белла для трихотомных наблюдаемых

А.В. Белинский

Парадоксы Белла, связанные с фундаментальными свойствами света и природой фотона, рассматриваются с единой позиции — проверки гипотезы существования стационарной неотрицательной функции распределения совместных вероятностей. Эта гипотеза, связанная с локальной теорией скрытых переменных как возможной интерпретацией квантовой теории, позволяет сформулировать неравенства Белла, доступные экспериментальному тестированию. Рассматриваются неравенства Белла для различного числа наблюдателей V . Квантовая теория предсказывает нарушения этих неравенств в оптических экспериментах. Показано, что с увеличением числа наблюдателей V требования к квантовой эффективности детекторов η снижаются от $\eta > 2/3$ при $V = 2$ до $\eta > 1/2$ при $V \rightarrow \infty$. Даны примеры функций распределения совместных вероятностей, иллюстрирующие рассмотрение. Предлагается вариант разрешения парадокса Гринбергера–Хорна–Цайлингера (GHZ).

PACS number: 03.65.Bz

Содержание

1. Введение (323).
 2. Неравенства Белла для двух наблюдателей (324).
 3. Неравенства Белла для трех наблюдателей (329).
 4. Неравенства Белла для четырех и большего числа наблюдателей (330).
 5. Парадокс Гринбергера–Хорна–Цайлингера (GHZ) для трех и четырех наблюдателей (331).
 6. Приложение (332).
А. Квантовый расчет схем с двумя наблюдателями. В. Вывод неравенства типа СН. С. Вывод неравенства Белла для трех наблюдателей. D. Распределение шестимерных совместных вероятностей в случае эксперимента для трех наблюдателей. E. Распределение восьмимерных совместных вероятностей в случае эксперимента для четырех наблюдателей. F. Теорема Белла для пяти наблюдателей. G. Распределение совместных вероятностей в случае эксперимента для произвольного числа наблюдателей V .
 7. Заключение (334).
- Список литературы (335).

1. Введение

Бурное развитие квантовой оптики и экспериментальные успехи, достигнутые в последнее время, подводят к вопросу о природе света и его материальных носителей — фотонах, которая до сих пор остается невыясненной. Твердо установлено, что энергия от одного материаль-

ного тела к другому может переноситься дискретными порциями — квантами. Пусть источник света освещает приемник (рис. 1). Если источник малоинтенсивный, а приемник достаточно чувствительный, то на выходе приемника получим импульсы фототока, которые, как принято считать, связаны с прибытием на него фотонов.

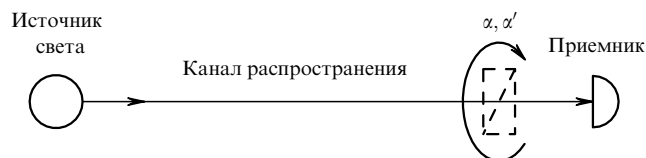


Рис. 1. Источник света освещает приемник. Штрихом показан поляризационный анализатор, ориентированный под углом α или α' . Канал распространения, например вакуум, анализатор и приемник образуют приемный тракт.

Зададимся вопросом: зависят ли свойства света (свойства фотонов в момент их рождения) *только* от состояния источника или на них может оказывать влияние состояние приемного тракта? Чтобы ответить на этот вопрос, можно, например, внести изменения в состояние приемного тракта, не изменяя состояния источника, и проанализировать результаты испытаний до и после таких изменений. Установим, например, в приемном тракте анализатор состояния поляризации и будем регистрировать фотоотсчеты при двух значениях углов его поворота α и α' , т.е. разобьем эксперимент на две серии.

Наблюдаемую величину (например, скорость фотоотсчетов) в первой серии обозначим как R_A , во второй — как $R_{A'}$. Если результаты эксперимента удастся описать в

А.В. Белинский. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 119899 Москва, Воробьевы горы, Россия
Тел. (095) 143-48-31

Статья поступила 30 сентября 1996 г.

рамках теории вероятностей и существования неотрицательной функции распределения совместных вероятностей фотоотчетов $P_{AA'}$, то изменения приемного тракта затрагивают *только* условия регистрации. Если же не удастся, то изменения приемного тракта *меняют свойства самого света*.

К сожалению, простого эксперимента, реализующего эту программу, пока не придумано¹. Поэтому, следуя Эйнштейну – Подольскому – Розену (ЭПР) [5], Бому [6], Беллу [7], исследуем парадоксы поведения пар коррелированных квантовых частиц.

Рассмотрим пока не конкретизируемый эксперимент, в котором измеряются четыре величины A, A', B, B' . Предположим вначале, что все четыре существуют одновременно и одновременно могут быть измерены. Эксперимент повторяется большое число раз $N \gg 1$ и в каждой реализации i имеем четверку чисел a_i, a'_i, b_i, b'_i . Результаты такого эксперимента можно свести в таблицу.

Таблица

Номер реализации	A	A'	B	B'
1	a_1	a'_1	b_1	b'_1
2	a_2	a'_2	b_2	b'_2
...
i	a_i	a'_i	b_i	b'_i
...
N	a_N	a'_N	b_N	b'_N

Попытаемся описать результаты эксперимента детерминистической теорией, тогда исход каждой реализации i определяется некой совокупностью параметров $\{\lambda_i\}$, в общем случае переменных, известных или неизвестных. Существование множества Λ всевозможных $\{\lambda_i\}$ позволяет предположить также существование распределения четырехмерных совместных вероятностей $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$, которое можно посчитать по результатам эксперимента, сведенным в таблицу. Большими буквами обозначаем наблюдаемые величины, в общем случае случайные, а малыми — принимаемые ими значения. Предположим, что исход (a, a', b, b') наблюдался в I реализациях из N , тогда элементарная вероятность

$$P_{AA'BB'}(a, a', b, b') = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I}{N}. \quad (1)$$

Квантовая теория не дает рецепта вычисления параметров $\{\lambda_i\}$ (потому они называются скрытыми), следовательно, факт их существования нуждается в проверке. Далее, если хоть одна пара из четырех наблюдаемых A, A', B, B' описывается некоммутирующими операторами, то возникает и вопрос о существовании $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$, поскольку непосредственный квантовый расчет иногда дает для них отрицательные значения [8, 9]. Более того, неизвестно, как одновременно измерить наблюдаемые, описываемые некоммутирующими операторами.

Ответ на вопрос о существовании $\{\lambda_i\}$ и $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$ может дать теорема Белла. Она пред-

лагает конкретные варианты экспериментов, результаты которых, согласно предсказаниям квантовой теории, нельзя свести в таблицу и описать распределением четырехмерных совместных вероятностей $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$. Наблюдаемые A и A' описываются при этом некоммутирующими операторами, как и B, B' , следовательно, приходится отказаться от измерения всех четырех наблюдаемых одновременно. Эксперимент разбивается на четыре серии: в первой измеряется пара A и B , во второй — A' и B , в третьей — A и B' , в четвертой — A' и B' . Измерительный тракт при этом должен иметь возможность переключения от одной серии измерений к другой. Существенным является предположение о независимости состояния источника от состояния измерительного тракта (положения переключателя). Это предположение является признаком локальной теории.

В каждой серии испытаний регистрируется N реализаций. В результате получается $4N$ пар чисел, т.е. N восьмерок чисел. Можно попытаться их свести в таблицу, т.е. привести к N четверкам чисел в результате произвольных перестановок пар и затем приписать каждой строке таблицы некую совокупность скрытых переменных $\{\lambda_i\}$. При этом возникает вопрос: в случае существования скрытых переменных все ли реализации должны вписаться в таблицу? Очевидно, нет, так как реализации в различных сериях эксперимента могут быть обусловлены не идентичными значениями $\{\lambda_i\}$. Таким образом, некоторые реализации придется отбросить. Какие? Например те, которые не изменяют моментов. Но тогда, вместо того чтобы сводить результаты эксперимента в таблицу, необходимо установить определенные соотношения между измеряемыми моментами (см. также [10]), которые следовали бы из принципиальной возможности свести результаты эксперимента в таблицу в случае идентичности $\{\lambda_i\}$ в каждой серии эксперимента. Далее анализируются именно такие соотношения. Если они нарушатся в эксперименте, то его невозможно будет описать при помощи $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$, а необходимым условием существования скрытых переменных предполагается факт существования неотрицательного распределения совместных элементарных вероятностей $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$, поскольку [11]

$$P_{AA'BB'}(a, a', b, b') = \int_{\Lambda(a, a', b, b')} P(\lambda) d\lambda, \quad (2)$$

где $\Lambda(a, a', b, b')$ — подмножество всего множества скрытых параметров Λ , которое дает результат (a, a', b, b') , а $P(\lambda)$ — плотность распределения скрытых параметров.

2. Неравенства Белла для двух наблюдателей

Рассмотрение квантовых парадоксов типа ЭПР – Бома – Белла начнем со схемы [12], представленной на рис. 2а, близкой также к экспериментам [13, 14].

Источник излучает пару фотонов, которые разлетаются в противоположные стороны — один направлен к наблюдателю A , а другой — к B . Состояния поляризации фотонов коррелированы, например, оба фотона поляризованы в одной плоскости.

Перед детекторами установлены анализаторы в виде поляризационных призм, направляющих фотон на один

¹ Определенные надежды в этом плане связаны с отрицательностью функции распределения совместных вероятностей Вигнера (см., например, [1–3]) и возможностью ее измерения [4].

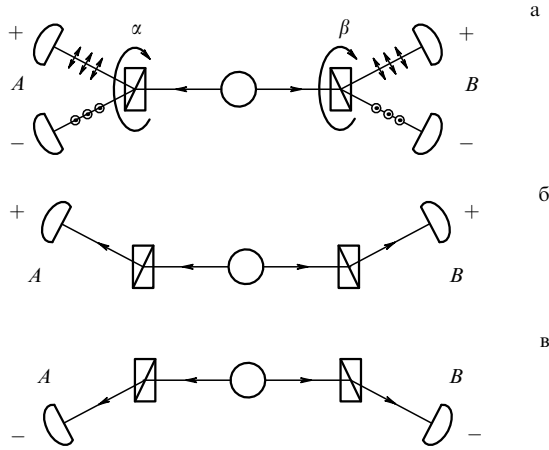


Рис. 2. Источник излучает пару разлетающихся фотонов с коррелированными поляризациями. Они регистрируются двумя наблюдателями A и B . Измерительный тракт каждого из наблюдателей включает анализатор в виде поляризационной призмы и два детектора. α и β определяют угловую ориентацию анализаторов относительно, например, оси x . Все четыре детектора в схеме предполагаются идентичными (а). Возможные варианты траекторий фотонов при $\alpha = \beta$ (условия прохождения фотонами анализаторов при этом идентичны) (б) и (в).

из двух детекторов. Все четыре детектора полагаем идентичными. Два наблюдателя A и B одновременно регистрируют каждый по одному фотону на детекторах "+" или "-" (вначале для простоты полагаем квантовую эффективность детекторов $\eta = 1$).

Вероятность одновременных фотоотсчетов зависит от ориентации анализаторов, характеризуемой углами поворота анализаторов α и β . Рассмотрим случай $\alpha = \beta$ (при этом условия прохождения анализаторов каждым из фотонов пары совпадают). При повторении испытаний наблюдатель A регистрирует фотоотсчеты то на одном, то на другом детекторе. Аналогично — наблюдатель B . Казалось бы, возможны четыре варианта синхронных траекторий фотонов пары: оба попадают в верхние "+" детекторы (рис. 2б), оба — в нижние "-" (рис. 2в), один фотон попадает в "+", другой — в "-" и наоборот. Однако в эксперименте наблюдаются *только* первые два варианта, изображенные на рис. 2б, в.

Если попытаться объяснить этот результат локальной детерминистической моделью, то логично предположить, что поведение пары разлетевшихся фотонов на анализаторах было полностью или частично предопределено источником в момент их рождения. Эту предопределенность можно попытаться описать некой совокупностью скрытых параметров $\{\lambda_i\}$ и функцией распределения совместных вероятностей $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$. Как отмечалось выше, квантовая теория не дает алгоритма вычисления $\{\lambda_i\}$, поэтому попытку интерпретации квантового формализма с точки зрения классической статистической физики принято называть локальной теорией скрытых параметров или скрытых переменных. Ее адекватность можно попытаться проверить при помощи эксперимента, схематически представленного на рис. 2а. Локальность при этом означает предположение того, что результаты испытаний, зарегистрированные наблюдателем A , не зависят от угловой ориентации β призмы наблюдателя B , и наоборот (результаты B не зависят от α).

Параметризуем результаты испытаний следующим образом. Если наблюдатель A при ориентации его анализатора под углом α зарегистрировал фотоотсчет на детекторе "+", то дискретной случайной величине $A(\alpha) \equiv A$ присваиваем значение $a = +1$. Если же это событие произошло при угле α' , то величине $A(\alpha') \equiv A'$ присваиваем значение $a' = +1$. Аналогично кодируем фотоотсчеты на детекторе "-" (им присваиваем значения a или $a' = -1$), а также фотоотсчеты наблюдателя B (b или $b' = \pm 1$). Таким образом, величины A, A', B, B' , вначале полагаем дихотомными: $a, a', b, b' = \pm 1$.

Как указывалось выше, проводится четыре серии испытаний: в первой измеряются величины A и B , во второй — A' и B , в третьей — A и B' , в четвертой — A' и B' . Тогда справедливо неравенство Белла типа CHSH [15]

$$-1 \leq \langle S_2 \rangle \leq 1, \tag{3}$$

где наблюдаемая Белла (нижний индекс соответствует числу наблюдателей V)

$$S_2 \equiv \frac{1}{2} (AB + A'B + AB' - A'B'). \tag{4}$$

Неравенство CHSH (3) можно доказать, раскрыв моменты как [8, 9]

$$\langle AB \rangle = \sum_{a, a', b, b'} ab P_{AA'BB'}(a, a', b, b'). \tag{5}$$

Здесь и далее выписан лишь момент для первой серии испытаний, поскольку остальные три момента получаются простой заменой нештрихованных символов штрихованными, например,

$$\langle A'B \rangle = \sum_{a, a', b, b'} a'b P_{AA'BB'}(a, a', b, b'). \tag{6}$$

Подставив их в (3) и воспользовавшись свойствами элементарных вероятностей

$$0 \leq P_{AA'BB'}(a, a', b, b') \leq 1, \tag{7}$$

$$\sum_{a, a', b, b'} P_{AA'BB'}(a, a', b, b') = 1, \tag{8}$$

нетрудно убедиться в правильности неравенства (3).

Другой вариант доказательства основан на том, что в случае дихотомных наблюдаемых $a, a', b, b' = \pm 1$ имеем [16–18]

$$\begin{aligned} s_2 &\equiv \frac{1}{2} (ab + a'b + ab' - a'b') \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} [a(b + b') + a'(b - b')] = \pm 1 \end{aligned} \tag{9}$$

и, поскольку

$$\langle S_2 \rangle = \sum_{a, a', b, b'} s_2 P_{AA'BB'}(a, a', b, b'), \tag{10}$$

получаем (3).

С другой стороны, квантовое описание эксперимента, схематически представленного на рис. 2а, дает нарушение неравенства (3). Пусть, например, рождение коррелированных фотонных пар происходит в процессе параметрического рассеяния света в пьезокристалле с квадратичной нелинейностью [19]. Простейшее четырехмодовое описа-

ние такого рассеяния дает вектор состояния бифотонного поля вида (см., например, [18] и цитируемую там литературу)

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_{ax}|0\rangle_{ay}|1\rangle_{bx}|0\rangle_{by} + |0\rangle_{ax}|1\rangle_{ay}|0\rangle_{bx}|1\rangle_{by}), \quad (11)$$

где индексы x и y обозначают взаимно ортогональные направления поляризации.

Характерной особенностью состояния (11) является его нефакторизуемость (*entangled state*)²:

$$|\psi_2\rangle \neq |\psi\rangle_a |\psi\rangle_b. \quad (12)$$

Расчет входящих в (3) моментов дает (см. Приложение А)

$$\langle AB \rangle_{\psi_2} = \eta^2 \cos 2(\alpha - \beta). \quad (13)$$

При квантовой эффективности детекторов $\eta = 1$ и значениях углов

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = \frac{\pi}{4}, \quad \beta = \frac{\pi}{8}, \quad \beta' = -\frac{\pi}{8} \quad (14)$$

получаем противоречие с (3): $\sqrt{2} \leq 1$.

В экспериментах [12] и др. зарегистрировано нарушение неравенства CHSH (3), что расценивается как опровержение теории скрытых переменных. Этот вывод подвергается сомнению в [20–27] и др. Дело в том, что с целью исключения влияния η в этих экспериментах учитывались только парные фотоотсчеты, выделяемые схемой совпадений, и моменты фактически вычислялись как

$$\langle AB \rangle_M = \frac{1}{M_{AB}} \sum_{i=1}^{M_{AB}} a_i b_i, \quad (15)$$

где $M_{AB} \gg 1$ — число парных фотоотчетов в серии испытаний. Таким образом, число реализаций, по которым производится усреднение, здесь принимается равным числу парных совпадений M_{AB} . Согласно (15), имеем

$$\langle |AB| \rangle_M = 1. \quad (16)$$

Подставим (16) в неравенство CHSH (3):

$$|\langle AB \rangle_M + \langle A'B \rangle_M + \langle AB' \rangle_M - \langle A'B' \rangle_M| \leq 2 \langle |AB| \rangle_M. \quad (17)$$

Это неравенство справедливо лишь в случае дихотомных наблюдаемых ($a, a', b, b' = \pm 1$). Однако в реальном эксперименте детекторы не могут быть идеальными, и их квантовая эффективность η всегда меньше 1. Следовательно, наблюдаемые A, A', B, B' иногда принимают нулевые значения, т.е. $a, a', b, b' = 0, \pm 1$. Неравенство (17) при этом оказывается неверным, поскольку нарушается числовое неравенство

$$|ab + a'b + ab' - a'b'| \leq 2|ab|, \quad (18)$$

например, при $a = 0, a' \neq 0$ и $b' \neq 0$. Значит, правило усреднения (15) для трихотомных наблюдаемых неверно.

Проиллюстрируем это на примере конкретной модели, построенной для трихотомных наблюдаемых A, A', B, B' на основании неотрицательного распределения четырехмерных совместных вероятностей $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$, которые далее для краткости будем обозначать как $(aa'bb')$, т.е. $P_{AA'BB'}(a = +1, a' = 0, b = -1, b' = -1) \equiv \equiv (+0--)$.

Как отмечалось выше, возможность описания эксперимента при помощи неотрицательного распределения четырехмерных совместных вероятностей предполагает одновременное существование значений наблюдаемых, описываемых некоммутирующими операторами (например, A и A'), т.е. допускается их априорное существование до измерения, что согласуется с теорией скрытых переменных.

Положим элементарные вероятности равными

$$\begin{aligned} (+ + + 0) &= (- - - 0) = (+ 0 + +) = (- 0 - -) = \\ &= (0 + + -) = (0 - - +) = (+ - 0 +) = \\ &= (- + 0 -) = \frac{w}{8}, \\ (+ + + +) &= (+ - - +) = (- + + -) = (- - - -) = \\ &= (+ + + -) = (- - - +) = (+ - + +) = \\ &= (- + - -) = \frac{1-w}{8} \end{aligned} \quad (19)$$

и остальные $(aa'bb') = 0$. Параметр w здесь может принимать значения, лежащие в интервале от 0 до 1.

Согласно (5), (19), имеем

$$\langle AB \rangle = \frac{1}{2}, \quad (20)$$

и (3) не нарушается. Однако момент

$$\langle |AB| \rangle = 1 - \frac{w}{2} \quad (21)$$

при $w \neq 0$ отличается от (16). Следовательно, правило (15) противоречит (5) и его использование может привести к нарушению (3). Действительно, если учитывать только парные совпадения, то

$$\langle AB \rangle_M = \frac{\langle AB \rangle}{\langle |AB| \rangle} \quad (22)$$

и, согласно (19), имеем

$$\frac{\langle AB \rangle}{\langle |AB| \rangle} = \frac{\langle A'B \rangle}{\langle |A'B| \rangle} = \frac{\langle AB' \rangle}{\langle |AB' \rangle} = -\frac{\langle A'B' \rangle}{\langle |A'B' \rangle} = \frac{1}{2-w}. \quad (23)$$

Варьирование параметра w от 0 до 1 соответствует изменению отношений (23) от 1/2 до 1. В частности, при $w = 2 - \sqrt{2}$ они равны $\sqrt{2}/2$ и совпадают с отношением момента (13) к моменту (26) (см. ниже) при значениях углов (14). Таким образом, неравенство (3) нарушается так же, как и предсказывает квантовая теория.

Итак, регистрация только парных совпадений не позволяет выявить отличий между предсказаниями квантовой теории и локальной теории скрытых переменных. С другой стороны, согласно (19) и (31) (см. далее),

$$\langle |A| \rangle = \langle |A'| \rangle = \langle |B| \rangle = \langle |B'| \rangle = 1 - \frac{w}{4}, \quad (24)$$

² Читатель, с трудом воспринимающий квантовый формализм, может пропустить эти соотношения без ущерба для понимания последующего материала.

т.е. при $w > 0$ справедливо неравенство $\langle |A| \rangle > \langle |AB| \rangle$, например, при $w = 2 - \sqrt{2}$ имеем

$$\frac{\langle |AB| \rangle}{\langle |A| \rangle} \equiv \frac{2(2-w)}{4-w} = 2(\sqrt{2}-1) \approx 0,83, \quad (25)$$

что дает надежду экспериментально установить отличия модели (19) от предсказаний квантовой теории, поскольку в состоянии (11) (см. Приложение А)

$$\langle |AB| \rangle_{\psi_2} = \eta^2, \quad (26)$$

$$\langle |A| \rangle_{\psi_2} = \eta. \quad (27)$$

Для выявления таких отличий введем в неравенство Белла средние числа одиночных событий (в данном случае одиночных фотоотсчетов) [23]:

$$2|\langle S_2 \rangle| \leq \langle |A| \rangle + \langle |A'| \rangle + \langle |B| \rangle + \langle |B'| \rangle - \langle |AB| \rangle - \langle |A'B'| \rangle, \quad (28)$$

или в более компактной форме

$$|\langle S_2 \rangle| \leq \frac{1}{2} [\langle N_{AB} \rangle + \langle N_{A'B'} \rangle], \quad (29)$$

где $N_{AB} \equiv |A| + |B| - |AB|$. Величина $N_{AB} = 1$, если a и b не равны нулю одновременно ($a = b = 0$ соответствует отсутствию события). Таким образом, $\sum_i N_{AB}$ — число реализаций в серии испытаний, которое включает как парные, так и одиночные фотоотсчеты.

Другой вариант неравенства:

$$4|\langle S_2 \rangle| \leq 2\langle N_1 \rangle + \langle N_2 \rangle, \quad (30)$$

где $N_1 \equiv |A| + |A'| + |B| + |B'|$, а $N_2 \equiv |AB| + |A'B'| + |AB'| + |A'B|$.

Эти неравенства выводятся исходя из предположения существования неотрицательного распределения четырехмерных совместных вероятностей. В справедливости (28), (30) легко убедиться, подставляя в них моменты, записанные как

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_{a, a', b, b'} a P_{AA'BB'}(a, a', b, b'), \\ \langle AB \rangle &= \sum_{a, a', b, b'} ab P_{AA'BB'}(a, a', b, b'), \end{aligned} \quad (31)$$

и аналогично для остальных моментов.

Можно также доказать неравенство (28) с помощью числового неравенства

$$\begin{aligned} -(|a| + |a'| + |b| + |b'| - |ab| - |a'b'|) &\leq 2s_2 \leq \\ &\leq |a| + |a'| + |b| + |b'| - |ab| - |a'b'|. \end{aligned} \quad (32)$$

Для его доказательства рассмотрим вначале случай $|a| = |a'| = |b| = |b'| = 1$. При этом, согласно (9), $s_2 = \pm 1$, и (32) выполняется. Полагая далее $a = 0$, имеем неравенство $|a'(b-b')| \leq |b| + |b'| + |a'|(1-|b'|)$, которое выполняется в силу $|a'(b-b')| \leq |b| + |b'|$. Аналогично — для a' , b или $b' = 0$. Из соотношений (7), (10), (32) следует (28).

Сформулируем неравенство (29) на языке скоростей счета. Положим скорости счета детекторов в различных сериях эксперимента одинаковыми, что обычно и имеет

место в экспериментах с идентичными детекторами:

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv R_{|A|} = R_{|A'|} = R_{|B|} = R_{|B'|}, \\ R_{|A|} &\equiv R_A(+) + R_A(-), \end{aligned} \quad (33)$$

где $R_A(+)$ и $R_A(-)$ — скорости счета детекторов $A+$ и $A-$;

$$R_2 \equiv R_{|AB|} = R_{|A'B|} = R_{|AB'|} = R_{|A'B'|}, \quad (34)$$

$$R_{|AB|} = R_{AB}(++) + R_{AB}(--) + R_{AB}(+-) + R_{AB}(-+), \quad (35)$$

где $R_{AB}(a, b)$ — скорость парных отсчетов.

Поскольку

$$\langle |A| \rangle \propto R_1, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \langle AB \rangle \propto R_{AB} &\equiv R_{AB}(++) + R_{AB}(--) - \\ &- R_{AB}(+-) - R_{AB}(-+), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\langle |AB| \rangle \propto R_2, \quad (38)$$

получаем неравенство, удобное для экспериментальной проверки:

$$|R_{AB} + R_{A'B} + R_{AB'} - R_{A'B'}| \leq 2(R_1 - R_2). \quad (39)$$

Его можно свести к неравенству CHSH (3), разделив обе части на $2R_1 - R_2$. При этом моменты следует определять как

$$\langle AB \rangle_N = \frac{R_{AB}(++) + R_{AB}(--) - R_{AB}(+-) - R_{AB}(-+)}{2R_1 - R_2}. \quad (40)$$

Таким образом, отличие неравенства (29) от (3) можно свести к различию процедур усреднения. Если вместо правила (15) усреднение производить по полному числу реализаций в серии испытаний

$$N = \sum_i N_{AB} = \sum_i N_{A'B'} = \sum_i N_{A'B} = \sum_i N_{A'B'} \gg 1, \quad (41)$$

включающему как парные, так и одиночные фотоотсчеты, то

$$\langle AB \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{M_{AB}} a_i b_i, \quad (42)$$

и неравенство CHSH (3) сводится к (29).

Условие (41) формально означает, что в каждой серии эксперимента произведено одинаковое число (N) реализаций, однако на языке скоростей счета вместо (41) достаточно выполнения (33), (34).

Согласно (13), (26), (27), четырехмодовая квантовая модель предсказывает

$$\langle AB \rangle_N = \frac{\langle AB \rangle_{\psi_2}}{\langle N_{AB} \rangle_{\psi_2}} = \frac{\eta \cos 2(\alpha - \beta)}{2 - \eta}. \quad (43)$$

Подставим (43) в (3). При выполнении (14) получим неравенство, в которое входит η и которое нарушается при

$$\eta > 2(\sqrt{2}-1) \approx 0,83 \quad (44)$$

и в отсутствие ложных фотоотсчетов. Аналогичный результат получен в [20–27].

В реальном эксперименте получить отношения (23) точно равными $\sqrt{2}/2$ не удастся из-за случайных совпадений фотоотчетов от различных фотонных пар (см., например, [18]). Учесть этот фактор можно уменьшением w в (23), что приведет к ужесточению требования к эффективности детекторов, необходимой для фиксации нарушений (28)–(30).

Перейдем далее к неравенству Белла типа СН [28]

$$P_{AB}(a, b) + P_{A'B}(a', b) + P_{AB'}(a, b') - P_{A'B'}(a', b') \leq \leq P_A(a) + P_B(b), \quad (45)$$

вывод которого также связан с допущением существования неотрицательного распределения четырехмерных совместных вероятностей (см. Приложение В). Аналогичные неравенства анализировались в [20–27] и др.

Экспериментальная проверка неравенства (45) может быть следующей. В схеме на рис. 2а будем учитывать, например, только срабатывания детекторов "++". Тогда

$$R_{AB}(++) + R_{A'B}(++) + R_{AB'}(++) - R_{A'B'}(++) \leq \leq R_A(+) + R_B(+). \quad (46)$$

Трихотомности наблюдаемых в неравенстве типа СН не требуется — достаточно их дихотомности: $a, a', b, b' = 0, +1$.

Квантовая теория предсказывает (см. Приложение А)

$$P_A(+) = P_B(+) = \frac{\eta}{2}, \quad P_{AB}(++) = \frac{\eta^2}{2} \cos^2(\alpha - \beta). \quad (47)$$

Подставим значения углов (14) в (47) и далее — в (45), получим неравенство, которое, как и (28)–(30), нарушается при $\eta > 0,83$. Однако, если максимальное нарушение (28)–(30) при $\eta = 1$ составляло примерно 41%, то в данном случае оно оказывается вдвое меньшим — примерно 20%. Условие $\eta > 0,83$, полученное из анализа неравенств (28)–(30) и (45), согласуется с модельным ограничением (25), т.е. вероятностная модель (19) дает предельно возможное значение отношения $\langle |AB| \rangle / \langle |A| \rangle$ в случае квантового состояния (11). В этом смысле распределение (19) является оптимальным.

Отсутствие ложных срабатываний и условие $\eta > 0,83$ являются достаточно жесткими ограничениями, накладываемыми на детекторы. Снижения требуемой эффективности η можно достичь, увеличив число наблюдателей, либо воспользовавшись предложением работ [22, 29] вместо состояния (11) сформировать состояние более общего вида

$$|\tilde{\psi}_2\rangle = \mu|1\rangle_{ax}|0\rangle_{ay}|1\rangle_{bx}|0\rangle_{by} + \nu|0\rangle_{ax}|1\rangle_{ay}|0\rangle_{bx}|1\rangle_{by}, \quad (48)$$

где коэффициенты μ и ν , удовлетворяющие условию нормировки $|\mu|^2 + |\nu|^2 = 1$, для простоты можно положить действительными.

Физический смысл отличия состояния (48) от (11) состоит в следующем. В состоянии (11) x - и y -поляризации фотонов равновероятны от реализации к реализации (от одной фотонной пары к другой). В состоянии (48) имеется преимущественная ориентация плоскости поляризации фотонов. Например, при $|\mu| < |\nu|$ — это y -поляризация.

Сформировать состояние (48) и провести эксперимент можно по схеме, представленной на рис. 3. Неравен-

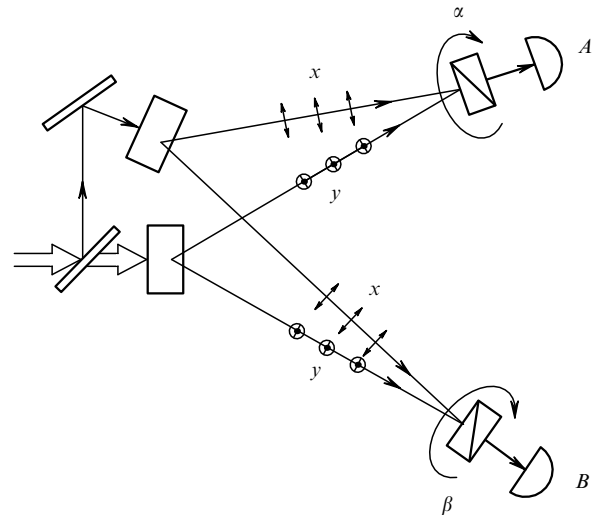


Рис. 3. Схема эксперимента по проверке неравенства Белла типа СН. Накачка (слева) расщепляется светоделителем на два неравных по интенсивности пучка и освещает два пьезокристалла. В кристаллах происходит неколлинеарное параметрическое рассеяние накачки с рождением коррелированных фотонных пар. Один фотон пары направляется к наблюдателю А, а другой — к В. Фотоны от разных кристаллов плоско-поляризованы во взаимно ортогональных направлениях (x и y). Они смешиваются на анализаторе и детектируются. α и β — углы поворота анализаторов. При $\alpha = \beta$ условия прохождения фотонами анализаторов идентичны.

ство $|\mu| < |\nu|$ реализуется в ней благодаря неравному распределению накачки между пьезокристаллами. Квантовый расчет этой схемы дает следующие результаты (см. Приложение А):

$$P_A = \eta(\mu^2 \cos^2 \alpha + \nu^2 \sin^2 \alpha), \quad (49)$$

$$P_B = \eta(\mu^2 \cos^2 \beta + \nu^2 \sin^2 \beta), \quad (50)$$

$$P_{AB} = \eta^2(\mu \cos \alpha \cos \beta + \nu \sin \alpha \sin \beta)^2. \quad (51)$$

Подставим их в неравенство (45), переписав его в виде

$$\eta \leq \frac{P_A + P_B}{P_{AB} + P_{A'B} + P_{AB'} - P_{A'B'}}. \quad (52)$$

Найдем минимальное неотрицательное значение правой части неравенства (52). Пусть $P_A = P_B + \Delta$, $\Delta \geq 0$. В силу условия соответствия, аналогичного (107) (см. Приложение В), имеем $P_{AB} \leq P_B$, $P_{A'B} \leq P_B$, $P_{AB'} \leq P_A$, откуда

$$\frac{P_A + P_B}{P_{AB} + P_{A'B} + P_{AB'} - P_{A'B'}} \geq \frac{2P_B + \Delta}{3P_B + \Delta} \geq \frac{2}{3}. \quad (53)$$

Действительно, при $\mu/\nu = 0,001$, $\alpha = \beta = 0$, $\alpha' = -\beta' = 1,8^\circ$, согласно (49)–(52), имеем $\eta \leq 0,667$. Таким образом, нарушение (45) может иметь место при $\eta > 2/3$. Аналогичный результат получен в [22, 27, 29]. Однако скорость фотоотчетов в такой конфигурации оказывается существенно меньшей, чем при $\mu/\nu = 1$, что может привести к дополнительным сложностям, связанным с подавлением ложных фотоотчетов — темнового тока (подробнее см. [21, 22, 29]).

Напомним, что скорости счета $R_A \propto P_A$, $R_B \propto P_B$, $R_{AB} \propto P_{AB}$. Например, при указанных в предыдущем

абзаце значениях параметров, согласно (49)–(51), имеем $R_A = R_B \propto \eta$, $R_{AB} \approx R_{A'B} \approx R_{AB'} \propto \eta^2$, $R_{A'B'} = 0$. При $\eta = 2/3$ такой результат дают следующие элементарные вероятности:

$$(++ + 0) = (+0 ++) = (0 ++ 0) = (+00 +) = \frac{1}{4} \quad (54)$$

и остальные $(aa'bb') = 0$.

Легко проверить, что

$$\frac{P_{AB}(++)}{P_A(+)} = \frac{P_{AB}(++)}{P_B(+)} = \frac{P_{A'B}(++)}{P_{A'}(+)} = \frac{P_{AB'}(++)}{P_{A'}(+)} = \frac{2}{3},$$

т.е. скорость одиночных отсчетов в первых трех сериях эксперимента на 1/3 превышает скорость парных³. При $\eta > 2/3$ нельзя придумать такого четырехмерного распределения элементарных вероятностей, которое описывало бы результаты квантового расчета.

Каков физический смысл вероятностной модели (54)? В первой серии эксперимента, изображенного на рис. 3 (когда измеряются A и B при $\alpha = \beta = 0$), регистрируется *только* излучение одного верхнего кристалла. Следовательно, при регистрации фотоотсчета одним из наблюдателей другой фотон бифотонной пары с вероятностью 1/3 не обнаруживается другим наблюдателем, как бы исчезая в вакууме или в детекторах. При увеличении числа наблюдателей V эта вероятность может возрасти до 1/2 согласно (91) (см. далее). Такой эффект, если он имеет место в действительности, возможно объяснит происхождение нулевых флуктуаций вакуума. Однако настораживает отсутствие подобного рода ограничений на максимальную эффективность детекторов в квантовой теории. Эти соображения оправдывают интерес к поиску адекватной интерпретации квантового формализма и его связи с классической статистической физикой.

Далее, в последующих трех сериях эксперимента потери излучения от верхнего кристалла пренебрежимо малы. Казалось бы, скорость парных отсчетов не может уменьшаться, однако в четвертой серии эксперимента (когда измеряются A' и B' при $\alpha' = -\beta' = 1,8^\circ$) парные отсчеты оказываются полностью подавленными излучением нижнего кристалла ($P_{A'B'}(++) \propto R_{A'B'} = 0$). Такое управление света светом в вакууме характерно для интерференции.

3. Неравенство Белла для трех наблюдателей

Рассмотрим рис. 4 [16, 18]. Два параметрических источника испускают тройки фотонов. Можно, по-видимому, использовать нелинейное преобразование света в прозрачной среде с кубичной нелинейностью [30]. Предположим, что первый источник испускает фотоны с поляризацией x , а второй — с поляризацией y . Состояние трифотонного поля при этом нефакторизуемо:

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_{ax}|0\rangle_{ay}|1\rangle_{bx}|0\rangle_{by}|1\rangle_{cx}|0\rangle_{cy} + \\ &+ |0\rangle_{ax}|1\rangle_{ay}|0\rangle_{bx}|1\rangle_{by}|0\rangle_{cx}|1\rangle_{cy}), \quad (55) \\ |\psi_3\rangle &\neq |\psi\rangle_a|\psi\rangle_b|\psi\rangle_c. \end{aligned}$$

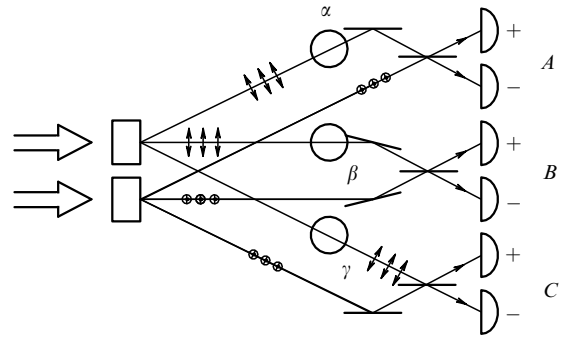


Рис. 4. Схема интерферометра интенсивности для трех наблюдателей. Коррелированные тройки фотонов одновременно рождаются в одном из нелинейных элементов (прямоугольники) под действием накачки, предварительно разделенной пополам. К каждому из трех наблюдателей A, B и C поступают две моды излучения, одна из которых испытывает фазовую задержку (кружки). Эти моды смешиваются на 50 %-ных светоделителях и детектируются. При $\varphi = \alpha + \beta + \gamma = 0$ все три фотона синхронно идут либо вверх (к детекторам "+"), либо один вверх и два вниз (к детекторам "-"). При $\varphi = \pi$ — один или три вниз.

В каналах введены регулируемые фазовые задержки α, β и γ . Далее установлены три 50 %-ных светоделителя (ими могут быть поляризационные призмы, ориентированные под углом 45° к осям x и y) и шесть счетчиков фотонов. Свяжем результаты эксперимента неравенством, справедливым для трихотомных наблюдаемых $a, a', b, b', c, c' = 0, \pm 1$:

$$4|\langle S_3 \rangle| \leq \langle N_2 \rangle - \langle N_3 \rangle, \quad (56)$$

где наблюдаемая Белла S_3 определяется из соотношения [16–18]

$$\begin{aligned} S_3 &\equiv \frac{1}{2} [S_2(C + C') + S_2'(C - C')] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} (A'BC + AB'C + ABC' - A'B'C'), \quad (57) \end{aligned}$$

в котором S_2' отличается от S_2 заменой всех штрихованных символов нештрихованными и наоборот: $S_2' \equiv (A'B' + AB' + A'B - AB)/2$; $N_2 = |AB| + |A'B| + |AB'| + |A'B'| + |AC| + |A'C| + |AC'| + |A'C'| + |BC| + |B'C| + |BC'| + |B'C'|$ — сумма всевозможных комбинаций парных фотоотсчетов, $N_3 = |ABC| + |A'BC| + |AB'C| + |ABC'| + |A'B'C| + |A'BC'| + |AB'C'| + |A'B'C'|$ — сумма всевозможных комбинаций тройных фотоотсчетов.

Доказательство неравенства (56) дано в Приложении С. Его экспериментальная проверка включает следующую программу. Проводятся четыре серии испытаний: в первой измеряются A', B и C , во второй — A, B' и C , в третьей — A, B и C' , наконец, в четвертой — A', B' и C' .

Положим, что скорости парных отсчетов одинаковы:

$$R_2 \equiv R_{|AB|} = R_{|A'B|} = \dots = R_{|B'C'|}. \quad (58)$$

Пусть скорости тройных отсчетов также одинаковы:

$$R_3 \equiv R_{|ABC|} = R_{|A'BC|} \dots = R_{|A'B'C'|}, \quad (59)$$

³ Однако $P_{A'B}(++)/P_{A'}(+) = P_{A'B'}(++)/P_{B'}(+) = 1$.

где

$$\begin{aligned} R_{|ABC|} &\equiv R_{ABC}(+++)+\dots+R_{ABC}(---)= \\ &= \sum_{a,b,c=\pm} R_{ABC}(a,b,c). \end{aligned} \quad (60)$$

Тогда неравенство (56) можно преобразовать к виду

$$|R_{A'BC}+R_{AB'C}+R_{ABC'}-R_{A'B'C'}| \leq 2(3R_2-2R_3), \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} R_{A'BC} &\equiv R_{A'BC}(+++)-\dots-R_{A'BC}(---)= \\ &= \sum_{a',b,c} a'bcR_{A'BC}(a',b,c). \end{aligned} \quad (62)$$

Квантовая теория предсказывает, что

$$\langle ABC \rangle_{\psi_3} = \eta^3 \cos \varphi, \quad \varphi \equiv \alpha + \beta + \gamma, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \langle |ABC| \rangle_{\psi_3} &= \langle |A'BC| \rangle_{\psi_3} = \\ &= \langle |AB'C| \rangle_{\psi_3} = \dots = \langle |A'B'C'| \rangle_{\psi_3} = \eta^3, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\langle |AB| \rangle_{\psi_3} = \langle |A'B| \rangle_{\psi_3} = \dots = \langle |B'C'| \rangle_{\psi_3} = \eta^2. \quad (65)$$

Эти соотношения можно получить соответствующим суммированием совместных вероятностей [18]

$$P_{ABC}(a,b,c) = \eta^3 \langle n_a n_b n_c \rangle_{\psi_3} = \frac{\eta^3}{4} \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right), \quad abc = +1, \quad (66)$$

$$P_{ABC}(a,b,c) = \eta^3 \langle n_a n_b n_c \rangle_{\psi_3} = \frac{\eta^3}{4} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right), \quad abc = -1. \quad (67)$$

Здесь приняты такие же обозначения, как и в Приложении А. Менее громоздкий вывод формулы (63) также дан в [18]. При этом наблюдаемые A , B и C описываются выражениями, аналогичными (104) (см. Приложение А):

$$A \equiv \eta(n_{a+} - n_{a-}) = \eta[a_x a_y^+ \exp(-i\alpha) + \text{H.с.}], \quad (68)$$

$$B \equiv \eta(n_{b+} - n_{b-}) = \eta[b_x b_y^+ \exp(-i\beta) + \text{H.с.}], \quad (69)$$

$$C \equiv \eta(n_{c+} - n_{c-}) = \eta[c_x c_y^+ \exp(-i\gamma) + \text{H.с.}], \quad (70)$$

где H.с. означает эрмитово-сопряженный оператор.

Действие этих операторов на вектор состояния (55) описывается соотношениями типа

$$A|\psi_3\rangle = \frac{\eta}{\sqrt{2}} [a_y^+ b_x^+ c_x^+ \exp(-i\alpha) + a_x^+ b_y^+ c_y^+ \exp(i\alpha)]|0\rangle, \quad (71)$$

где $|0\rangle$ обозначает вакуумное состояние всех шести мод. Аналогично для B и C . Несложно посчитать и

$$\begin{aligned} ABC|\psi_3\rangle &= \frac{\eta^3}{\sqrt{2}} [\exp(i\varphi)|1\rangle_{ax}|0\rangle_{ay}|1\rangle_{bx}|0\rangle_{by}|1\rangle_{cx}|0\rangle_{cy}+ \\ &+ \exp(-i\varphi)|0\rangle_{ax}|1\rangle_{ay}|0\rangle_{bx}|1\rangle_{by}|0\rangle_{cx}|1\rangle_{cy}], \end{aligned} \quad (72)$$

откуда следует (63).

Установим следующие значения фазовых задержек:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha' = \pi, \quad \beta = -\frac{\pi}{2}, \\ \beta' &= \pi, \quad \gamma = -\frac{\pi}{2}, \quad \gamma' = \pi, \end{aligned} \quad (73)$$

при которых $\cos(\alpha' + \beta + \gamma) = \cos(\alpha + \beta' + \gamma) = \cos(\alpha + \beta + \gamma') = -\cos(\alpha' + \beta' + \gamma') = 1$, и наблюдаемая Белла S_3 принимает максимально возможное значение. Кроме того, должна наблюдаться полная корреляция результатов, поскольку, согласно (63), (64),

$$\frac{\langle A'BC \rangle_{\psi_3}}{\langle |A'BC| \rangle_{\psi_3}} = \frac{\langle AB'C \rangle_{\psi_3}}{\langle |AB'C| \rangle_{\psi_3}} = \frac{\langle ABC' \rangle_{\psi_3}}{\langle |ABC'| \rangle_{\psi_3}} = -\frac{\langle A'B'C' \rangle_{\psi_3}}{\langle |A'B'C'| \rangle_{\psi_3}} = 1. \quad (74)$$

Этот результат можно объяснить с помощью модели, допускающей существование неотрицательного распределения шестимерных вероятностей трихотомных наблюдаемых, которая описана в Приложении D. Противоречие этой модели предсказаниям квантовой теории можно обнаружить в нарушении неравенства (56) или (61). Необходимым условием такого нарушения, согласно (63)–(65) и (73), является

$$\eta > \frac{3}{4}. \quad (75)$$

Это требование к эффективности детекторов, следующее из неравенства (56) или (61), согласуется с модельным ограничением (119) (см. далее Приложение D).

4. Неравенства Белла для четырех и большего числа наблюдателей

Вернемся к схеме рис. 4. Если источниками являются параметрические преобразователи на пьезокристаллах, обладающих квадратичной нелинейностью, то они испускают не только пары, но и четверки фотонов, т.е. помимо состояния (11) имеется примесь состояния [31]

$$\begin{aligned} |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_{ax}|0\rangle_{ay}|1\rangle_{bx}|0\rangle_{by}|1\rangle_{cx}|0\rangle_{cy}|1\rangle_{dx}|0\rangle_{dy}+ \\ &+ |0\rangle_{ax}|1\rangle_{ay}|0\rangle_{bx}|1\rangle_{by}|0\rangle_{cx}|1\rangle_{cy}|0\rangle_{dx}|1\rangle_{dy}), \end{aligned} \quad (76)$$

которое также нефакторизуемо:

$$|\psi_4\rangle \neq |\psi\rangle_a |\psi\rangle_b |\psi\rangle_c |\psi\rangle_d. \quad (77)$$

Добавим в схему измерительный канал четвертого наблюдателя D . Фазовую задержку последнего обозначим δ (или δ'). Свяжем результаты эксперимента неравенством

$$16|\langle S_4 \rangle| \leq 2\langle N_3 \rangle - 3\langle N_4 \rangle. \quad (78)$$

Здесь наблюдаемая Белла S_4 определяется из соотношения [17, 18]

$$\begin{aligned} S_4 &\equiv \frac{1}{2} [S_3(D+D') + S'_3(D-D')] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{4} [-ABCD + 4(A'BCD) + 6(A'B'CD) - \\ &- 4(A'B'C'D) - A'B'C'D'], \end{aligned} \quad (79)$$

где $K(A'BCD) \equiv A'BCD + AB'CD + ABC'D + ABCD'$ в символической форме означает сумму из K нежественных перестановок штрихов над величинами, заключенными в скобках, а $N_3 = |ABC| + |3(A'BC)| + |3(A'B'C)| + |A'B'C'| + \dots + |BCD| + |3(B'CD)| + |3(B'C'D')| + |B'C'D'|$ — сумма всевозможных комбинаций тройных фотоотчетов и $N_4 = |ABCD| + |4(A'BCD)| + |6(A'B'CD)| + |4(A'B'C'D)| + |A'B'C'D'|$ — сумма всевозможных комбинаций четверок фотоотчетов.

Доказательство неравенства (78) аналогично доказательству неравенства (56). Эксперимент по его проверке должен включать уже 16 серий (по числу слагаемых в S_4). Измеряемые моменты при этом могут быть сведены к скоростям счета аналогично тому, как это сделано в предыдущем разделе.

Квантовая теория предсказывает, что

$$\langle ABCD \rangle_{\psi_4} = \eta^4 \cos \varphi, \quad \varphi = \alpha + \beta + \gamma + \delta, \quad (80)$$

$$\langle |ABCD| \rangle_{\psi_4} = \langle |A'BCD| \rangle_{\psi_4} = \dots = \langle |A'B'C'D'| \rangle_{\psi_4} = \eta^4, \quad (81)$$

$$\langle |ABC| \rangle_{\psi_4} = \langle |A'BC| \rangle_{\psi_4} = \dots = \langle |B'C'D'| \rangle_{\psi_4} = \eta^3. \quad (82)$$

Эти соотношения выводятся аналогично (63)–(65).

Величины фазовых задержек подчиним следующим условиям:

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \gamma - \gamma' = \delta - \delta' = \frac{\pi}{2}, \quad (83)$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{3\pi}{4}, \quad (84)$$

при которых все 16 слагаемых S_4 равны $\eta^4 \sqrt{2}/2$. В этом случае $\langle |S_4| \rangle$ принимает максимально возможное значение. Необходимым условием нарушения неравенства (78) в таких условиях является

$$\eta > 4(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0,69. \quad (85)$$

Небольшого смягчения этого условия и сравнительного упрощения экспериментальной процедуры — двукратного уменьшения числа серий испытаний — можно достичь следующей модернизацией неравенства (78):

$$16|\langle \tilde{S}_4 \rangle| \leq \langle N_3 \rangle - \langle N_4 \rangle. \quad (86)$$

Модифицированная наблюдаемая Белла \tilde{S}_4 здесь определяется как

$$\begin{aligned} \tilde{S}_4 &\equiv \frac{1}{2}[S_3 D' + S_3' D] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{4}[-ABCD + 6(A'B'CD) - A'B'C'D']. \end{aligned} \quad (87)$$

Установим следующие значения фазовых задержек:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0, \quad \alpha' = \beta' = \gamma' = \delta' = \frac{\pi}{2}, \quad (88)$$

при которых должна наблюдаться полная корреляция результатов, поскольку, согласно (80), (81),

$$\frac{\langle ABCD \rangle_{\psi_4}}{\langle |ABCD| \rangle_{\psi_4}} = -\frac{\langle A'B'CD \rangle_{\psi_4}}{\langle |A'B'CD| \rangle_{\psi_4}} = \dots = \frac{\langle A'B'C'D' \rangle_{\psi_4}}{\langle |A'B'C'D'| \rangle_{\psi_4}} = 1. \quad (89)$$

Этот результат можно объяснить при помощи модели, допускающей существование неотрицательного распределения восьмимерных вероятностей трихотомных наблюдаемых, которая описана в Приложении Е. Противоречие этой модели предсказаниям квантовой теории можно обнаружить в нарушении неравенства (86). Необходимым условием такого нарушения, согласно (80)–(82), (89), является

$$\eta > \frac{2}{3} \approx 0,67. \quad (90)$$

Это требование к эффективности детекторов, следующее из неравенства (86), согласуется с модельным ограничением (122) (см. ниже).

Дальнейшее увеличение числа наблюдателей приводит к следующим результатам. При $V = 5$ для опровержения теории скрытых переменных требуются детекторы с квантовой эффективностью $\eta > 0,625$ (см. Приложение F). В случае произвольного $V \geq 3$ неотрицательное распределение совместных вероятностей, приводящее к нарушению неравенств Белла рассмотренного типа (см. Приложение G, соотношения (135), (136)), дает

$$\frac{\langle |A_1 A_2 \dots A_V| \rangle}{\langle |A_1 A_2 \dots A_{V-1}| \rangle} = \frac{V}{2(V-1)}, \quad (91)$$

следовательно, при $V \rightarrow \infty$ отношение (91) стремится к $1/2$.

Хотя проведение подобного эксперимента представляется маловероятным, этот результат интересен в эвристическом смысле, поскольку он дает нижний порог эффективности детекторов (50%), при которой принципиально возможно опровержение вероятностной модели, описанной в Приложении G, и в более широком смысле — в теории скрытых параметров вообще, если, конечно, не будут придуманы новые критерии ее проверки. Возможно, перспективным окажется конструирование неравенств типа СН для произвольного числа наблюдателей.

5. Парадокс Гринбергера – Хорна – Цайлингера (GHZ) для трех и четырех наблюдателей

Для схем с числом наблюдателей $V \geq 3$ помимо неравенств Белла можно сформулировать также парадокс GHZ [32, 33], приводящий к противоречию $-1 = +1$. Условием его существования является дихотомность переменных, не допускающая "нулей". При этом, согласно (74), в условиях полной корреляции имеем

$$a'bc = 1, \quad ab'c = 1, \quad abc' = 1, \quad a'b'c' = -1. \quad (92)$$

Каждое равенство здесь проверяется в одной из четырех серий эксперимента. Перемножим эти равенства друг на друга:

$$z_3 \equiv (a'bc)(ab'c)(abc')(a'b'c') \equiv (aa'bb'cc')^2 = -1. \quad (93)$$

Итак, квадрат действительного числа, казалось бы равный $+1$, оказывается отрицательным (-1). В этом суть парадокса. Его можно разрешить, не выходя за рамки теории скрытых переменных, воспользовавшись моделью, описанной в Приложении D. В ее основе лежит

отказ от дихотомности наблюдаемых A, A', B, B', C, C' в пользу их трихотомности, включая нули. При этом, согласно (117), z_3 всегда равна нулю, и вместо противоречия $-1 = +1$ в (93) имеем $z_3 = 0$.

Опровержение этой трихотомной модели возможно лишь при учете помимо тройных совпадений также и парных. Согласно (64), (65),

$$\frac{\langle |A'BC| \rangle_{\psi_3}}{\langle |A'B| \rangle_{\psi_3}} = \eta, \quad (94)$$

в то время, как подстановка (63)–(65) в (56) при соблюдении (73) дает $\eta \leq 0,75$. Следовательно, гипотеза существования неотрицательного распределения шестимерных совместных вероятностей трихотомных наблюдаемых не допускает возможности детекторам иметь эффективность выше 75 %.

Аналогично можно сформулировать парадокс GHZ для четырех наблюдателей [18, 32]. Согласно (89), в случае дихотомных наблюдаемых имеем

$$z_4 \equiv (abcd)(a'b'cd)(a'bc'd)(ab'c'd) \equiv (aa'bb'cc'd^2)^2 = -1. \quad (95)$$

Однако трихотомная модель, описанная в Приложении Е, дает $z_4 = 0$, разрешая, таким образом, парадокс.

Результат $-1 = +1$ очень нагляден и весьма впечатляет. Однако получить в эксперименте идеальную единичную корреляцию, видимо, не удастся. Тогда возникает вопрос: как трактовать экспериментальный результат с корреляцией, скажем, 0,97? Доказывает ли он неадекватность теории скрытых переменных? Насколько правомерно отбрасывать некоррелированные фотоотсчеты? Если к этому добавить необходимость апостериорной статистической обработки данных для проверки условия $\eta > V/2(V-1)$, следующего из (91), то становится ясной предпочтительность экспериментальной проверки неравенств типа СН (45).

6. Приложение

А. Квантовый расчет схем с двумя наблюдателями

Рассмотрим вывод формул (13), (26), (27), (47), (49)–(51) в рамках простейшей четырехмодовой квантовой модели. Вернемся к рис. 2а. Две моды, поступающие к наблюдателю A , будем описывать операторами уничтожения фотона a_x и a_y . Первый соответствует моде, плоско-поляризованной в направлении x , второй — в направлении y . Аналогично, две моды, поступающие к наблюдателю B , — операторами b_x и b_y .

Действие анализатора на амплитуды поля эквивалентно действию светоделителя с пропусканием $t_a = \cos \alpha$ и описывается унитарным преобразованием (см., например, [18])

$$\begin{aligned} a_+ &= t_a a_x + r_a a_y, \\ a_- &= -r_a a_x + t_a a_y, \end{aligned} \quad (96)$$

где a_+ — оператор, описывающий поле на входе детектора "+", a_- — на входе детектора "-", $r_a = \sin \alpha$, $t_a^2 + r_a^2 \equiv T_a + R_a = 1$.

Операторы чисел фотонов на детекторах канала A имеют вид

$$\begin{aligned} n_{a+} &= a_+^\dagger a_+ = T_a n_{ax} + R_a n_{ay} + t_a r_a (a_x^\dagger a_y + a_x a_y^\dagger), \\ n_{a-} &= a_-^\dagger a_- = R_a n_{ax} + T_a n_{ay} - t_a r_a (a_x^\dagger a_y + a_x a_y^\dagger), \end{aligned} \quad (97)$$

где a^\pm — соответствующие операторы рождения фотона.

Операторы наблюдаемых величин на выходе анализатора записаны здесь в представлении Гейзенберга, т.е. выражены через операторы входного поля. Их надо усреднять по исходному вектору состояния поля перед анализатором, т.е. по вектору (11). В более общем виде его можно представить вектором (48), тогда

$$P_A(+) = \eta \langle n_{a+} \rangle_{\tilde{\psi}_2} = \eta (\mu^2 \cos^2 \alpha + \nu^2 \sin^2 \alpha), \quad (98)$$

$$P_A(-) = \eta \langle n_{a-} \rangle_{\tilde{\psi}_2} = \eta (\nu^2 \cos^2 \alpha + \mu^2 \sin^2 \alpha). \quad (99)$$

Аналогичные соотношения определяют $P_B(\pm)$, которые получаются заменой a на b и α на β .

Далее,

$$P_{AB}(++) = \langle n_{a+} n_{b+} \rangle_{\tilde{\psi}_2} = \eta^2 (\mu \cos \alpha \cos \beta + \nu \sin \alpha \sin \beta)^2, \quad (100)$$

$$P_{AB}(--) = \langle n_{a-} n_{b-} \rangle_{\tilde{\psi}_2} = \eta^2 (\mu \sin \alpha \sin \beta + \nu \cos \alpha \cos \beta)^2, \quad (101)$$

$$P_{AB}(+-) = \langle n_{a+} n_{b-} \rangle_{\tilde{\psi}_2} = \eta^2 (\mu \cos \alpha \sin \beta - \nu \sin \alpha \cos \beta)^2, \quad (102)$$

$$P_{AB}(-+) = \langle n_{a-} n_{b+} \rangle_{\tilde{\psi}_2} = \eta^2 (\mu \sin \alpha \cos \beta - \nu \cos \alpha \sin \beta)^2. \quad (103)$$

Если учитывать только фотоотсчеты детекторов "+", то получаем описание схемы на рис. 3: из (98) и соответствующего выражения для $P_B(+)$ имеем (49), (50), а из (100) — результат (51).

Вернемся к схеме на рис. 2а. При $\mu = \nu = 1/\sqrt{2}$ из (98), (100) получаем (47), из (98), (99) получаем (27), поскольку $\langle |A| \rangle = P_A(+) + P_A(-)$. Из (100)–(103) получаем (13) и (26), поскольку $\langle AB \rangle = P_{AB}(++) + P_{AB}(--) - P_{AB}(+-) - P_{AB}(-+)$ и $\langle |AB| \rangle = P_{AB}(++) + P_{AB}(--) + P_{AB}(+-) + P_{AB}(-+)$.

Соотношение (13) проще получить так. Наблюдаемой A при $\mu = \nu = 1/\sqrt{2}$ соответствует оператор

$$A \equiv \eta (n_{a+} - n_{a-}) = \eta (\sigma_{az} \cos 2\alpha + \sigma_{ax} \sin 2\alpha). \quad (104)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_{ax} &= a_x^\dagger a_y + a_x a_y^\dagger, \quad \sigma_{ay} = -i(a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger), \\ \sigma_{az} &= a_x^\dagger a_x - a_y^\dagger a_y \end{aligned} \quad (105)$$

имеют свойства спиновых операторов Паули.

Аналогичные соотношения определяют оператор B :

$$B = \eta (n'_{b+} - n'_{b-}) = \eta (\sigma_{bz} \cos 2\beta + \sigma_{bx} \sin 2\beta). \quad (106)$$

В состоянии (11) $\langle \sigma_{ax} \sigma_{bz} \rangle_{\psi_2} = \langle \sigma_{zx} \sigma_{bx} \rangle_{\psi_2} = 0$, $\langle \sigma_{ax} \sigma_{bx} \rangle_{\psi_2} = \langle \sigma_{az} \sigma_{bz} \rangle_{\psi_2} = 1$, откуда следует (13). Моменты первого и третьего порядков равны нулю: $\langle A \rangle_{\psi_2} = \langle B \rangle_{\psi_2} = \langle ABA' \rangle_{\psi_2} = \dots = 0$. Квадраты наблюдаемых — $\langle A^2 \rangle_{\psi_2} = \langle B^2 \rangle_{\psi_2} = \eta^2$.

В. Вывод неравенства типа СН

Пусть значения a, a', b, b' принадлежат множеству \mathcal{S} , например, в случае трихотомных наблюдаемых элементами множества являются $0, \pm 1$. Тильдой будем помечать дополнительные подмножества, например, $a \cup \tilde{a} = \mathcal{S}$. Тогда, в силу условия соответствия

$$P_{ABB'}(a, b, b') = P_{AA'BB'}(a, a', b, b') + P_{AA'BB'}(a, \tilde{a}', b, b'), \quad (107)$$

имеем

$$P_{ABB'}(a, b, b') \leq P_{A'B'}(a', b') + P_{A'B}(\tilde{a}', b) = P_{A'B'}(a', b') + P_B(b) - P_{A'B}(a', b). \quad (108)$$

С другой стороны,

$$0 \leq P_{ABB'}(a, \tilde{b}, \tilde{b}') = P_{AB}(a, \tilde{b}) - P_{ABB'}(a, \tilde{b}, b') = P_A(a) - P_{AB}(a, b) - P_{AB'}(a, b') + P_{ABB'}(a, b, b'), \quad (109)$$

откуда

$$-P_{ABB'}(a, b, b') \leq P_A(a) - P_{AB}(a, b) - P_{AB'}(a, b'). \quad (110)$$

Сложив неравенства (108) и (110), получим (45).

Приведенный вывод с небольшим изменением заимствован из работы [35], в свою очередь базировавшейся на более ранних работах [36, 37].

С. Вывод неравенства Белла для трех наблюдателей

Рассмотрим числовое неравенство

$$4|s_3| \leq n_2 - n_3, \quad (111)$$

в котором

$$s_3 = \frac{1}{2}(a'bc + ab'c + abc' - a'b'c'), \quad (112)$$

$$n_2 = |ab| + |a'b| + |ab'| + |a'b'| + |ac| + |a'c| + |ac'| + |a'c'| + |bc| + |b'c| + |bc'| + |b'c'|, \quad (113)$$

$$n_3 = |abc| + |a'bc| + |ab'c| + |abc'| + |a'b'c| + |a'bc'| + |ab'c'| + |a'b'c'|. \quad (114)$$

Положим вначале $|a| = |a'| = |b| = |b'| = |c| = |c'| = 1$, тогда $s_3 = \pm 1$ и (111) выполняется.

Пусть теперь $a = 0$, тогда вместо (111) имеем неравенство

$$2|a'(bc - b'c')| \leq |a'|(|b| + |b'| + |c| + |c'|) + (|bc| + |b'c| + |bc'| + |b'c'|)(1 - |a'|), \quad (115)$$

справедливость которого очевидна. Аналогично проверяются случаи, когда нулевые значения принимают b, b', c или c' .

Поскольку

$$\langle S_3 \rangle = \sum_{a, a', b, b', c, c'} s_3 P_{AA'BB'CC'}(a, a', b, b', c, c'), \quad (116)$$

а $P_{AA'BB'CC'}(a, a', b, b', c, c') \geq 0$, имеем (56).

D. Распределение шестимерных совместных вероятностей в случае эксперимента для трех наблюдателей

Запишем элементарные шестимерные совместные вероятности

$$P_{AA'BB'CC'}(a, a', b, b', c, c') \equiv (aa'bb'cc')$$

так, чтобы выполнялись следующие соотношения: $a'bc = 0$ или 1 , $ab'c = 0$ или 1 , $abc' = 0$ или 1 , $a'b'c' = 0$ или -1 и число нулей было минимальным, т.е.

$$\begin{aligned} (- - - - + 0) &= (+ + + + 0) = (- + - + - 0) = \\ &= (+ - - + 0) = (- - + + - 0) = \\ &= (+ + - - 0) = (- + + - 0) = \\ &= (+ - + - 0) = (+ + + - 0) = \\ &= (- + - - 0) = (+ + - + 0) = \\ &= (- + + + 0) = (+ - - - 0) = \\ &= (- - + - 0) = (- - - + 0) = \\ &= (+ - + + 0) = \dots = \\ &= (0 + + - +) = \frac{1}{48}. \end{aligned} \quad (117)$$

Остальные элементарные вероятности $P_{AA'BB'CC'}(a, a', b, b', c, c')$ положим равными нулю, тогда

$$\frac{\langle A'BC \rangle}{\langle |A'BC| \rangle} = \frac{\langle AB'C \rangle}{\langle |AB'C| \rangle} = \frac{\langle ABC' \rangle}{\langle |ABC'| \rangle} = -\frac{\langle A'B'C' \rangle}{\langle |A'B'C'| \rangle} = 1, \quad (118)$$

$$\frac{\langle |A'BC| \rangle}{\langle |A'B| \rangle} = \frac{\langle AB'C \rangle}{\langle |AB'| \rangle} = \dots = \frac{3}{4}. \quad (119)$$

Таким образом, минимальная эффективность детекторов для экспериментального опровержения этой модели должна быть $\eta > 3/4$.

E. Распределение восьмимерных совместных вероятностей в случае эксперимента для четырех наблюдателей

Запишем элементарные восьмимерные совместные вероятности

$$P_{AA'BB'CC'DD'}(a, a', b, b', c, c', d, d') \equiv (aa'bb'cc'dd')$$

так, чтобы выполнялись следующие соотношения: $abcd = 0$ или 1 , $a'b'cd = 0$ или -1 , $a'bc'd = 0$ или -1 , $a'bcd' = 0$ или -1 , $ab'c'd = 0$ или -1 , $ab'cd' = 0$ или -1 , $abc'd' = 0$ или -1 , $a'b'c'd' = 0$ или 1 и число нулей было минимальным, т.е.

$$\begin{aligned} (- + + + 0 - 0) &= (- - - + 0 + 0) = \\ &= (- - - + - 0 - 0) = \\ &= (- + - - - 0 - 0) = \dots = \\ &= (0 - 0 + - + - -) = \frac{1}{384}. \end{aligned} \quad (120)$$

Остальные $P_{AA'BB'CC'DD'}(a, a', b, b', c, c', d, d')$ положим равными нулю, тогда

$$\frac{\langle ABCD \rangle}{\langle |ABCD| \rangle} = -\frac{\langle A'B'CD \rangle}{\langle |A'B'CD| \rangle} = \dots = \frac{\langle A'B'C'D' \rangle}{\langle |A'B'C'D'| \rangle} = 1, \quad (121)$$

$$\frac{\langle |ABCD| \rangle}{\langle |ABC| \rangle} = \frac{\langle |A'B'CD| \rangle}{\langle |A'B'C| \rangle} = \dots = \frac{2}{3}. \quad (122)$$

Минимальная эффективность детекторов для экспериментального опровержения этой модели должна быть $\eta > 2/3$.

Г. Теорема Белла для пяти наблюдателей

Запишем числовое неравенство

$$16s_5 \leq n_4 - 2n_5 \quad (123)$$

для трихотомных переменных $a, a', b, b', c, c', d, d', e, e' = 0, \pm 1$, где

$$s_5 \equiv \frac{1}{2} [s_4(e + e') + s'_4(e - e')], \quad (124)$$

$$n_4 \equiv |abcd| + |4(a'bcd)| + \dots + |b'c'd'e'|, \quad (125)$$

$$n_5 \equiv |abcde| + |5(a'bcd)| + \dots + |a'b'c'd'e'|. \quad (126)$$

Неравенство (123) можно проверить аналогично (111).

При существовании неотрицательного распределения совместных вероятностей

$$P_{AA'BB'CC'DD'EE'}(a, a', b, b', c, c', d, d', e, e') \equiv \\ \equiv (aa'bb'cc'dd'ee')$$

имеем

$$16|\langle S_5 \rangle| \leq \langle N_4 \rangle - 2\langle N_5 \rangle. \quad (127)$$

Квантовая теория дает

$$\langle ABCDE \rangle_{\psi_5} = \eta^5 \cos \varphi, \quad (128)$$

$$\varphi \equiv \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon,$$

откуда следует [17, 18]

$$\langle S_5 \rangle_{\psi_5} = \frac{1}{4} \eta^5 [\cos 2\varphi - 10 \cos(2\varphi + \pi) + 5 \cos 2(\varphi + \pi)], \quad (129)$$

и при $\varphi = 0$ $\langle S_5 \rangle_{\psi_5} = 4\eta^5$. В этом случае неравенство (127) нарушается при

$$\eta > \frac{5}{8} = 0,625. \quad (130)$$

В соответствующей статистической модели ненулевыми оставим следующие элементарные вероятности:

$$(-0 - 0 - 0 - - -) = (-0 - 0 - 0 - + + -) = \\ = (-0 - 0 - 0 + - - -) = \dots = \frac{1}{2560}. \quad (131)$$

При этом

$$\frac{\langle ABCDE \rangle}{\langle |ABCDE| \rangle} = -\frac{\langle A'B'CDE \rangle}{\langle |A'B'CDE| \rangle} = \dots = \frac{\langle A'B'C'D'E \rangle}{\langle |A'B'C'D'E| \rangle} = 1, \quad (132)$$

$$\frac{\langle |ABCDE| \rangle}{\langle |ABCD| \rangle} = \frac{\langle |A'B'CDE| \rangle}{\langle |A'B'CD| \rangle} = \dots = \frac{5}{8}, \quad (133)$$

что согласуется со (130).

Г. Распределение совместных вероятностей в случае эксперимента для произвольного числа наблюдателей V

Будем описывать результаты испытаний у V наблюдателей случайными величинами $A_1, A'_1, A_2, \dots, A_V, A'_V$ — всего $2V$ величины.

В случае нечетного $V \geq 3$ полной корреляции типа (74), (118), (132), или — в более общем виде — типа

$$\frac{\langle A_1 A_2 \dots A_V \rangle}{\langle |A_1 A_2 \dots A_V| \rangle} = -\frac{\langle A'_1 A'_2 A_3 \dots A_V \rangle}{\langle |A'_1 A'_2 A_3 \dots A_V| \rangle} = \dots \\ = \frac{\langle A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A_5 \dots A_V \rangle}{\langle |A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A_5 \dots A_V| \rangle} = 1 \quad (134)$$

соответствует максимальное нарушение неравенств Белла [17, 18]. При $V = 4$ выполнение (121), (134) дает нарушение неравенства Белла (86), требующее меньших значений η (90), чем для регистрации нарушений неравенства (78) согласно (85). Кроме того, выполнение (134) позволяет исследовать парадокс GHZ для произвольного числа наблюдателей.

Условие (134) соблюдается, когда, во-первых, элементарные вероятности

$$P_{A_1 A'_1 A_2 \dots A_V A'_V}(a_1, a'_1, a_2, \dots, a_V, a'_V) \equiv (a_1 a'_1 a_2 \dots a_V a'_V)$$

включают, как минимум, $V - 2$ нуля; лучше так, чтобы из двух значений одноименных наблюдаемых (a_j и a'_j) могло быть нулевым только одно (поскольку элементарные вероятности с $a_j = a'_j = 0$ вклада в момент $\langle |A_1 A_2 \dots A_V| \rangle$ не дают). Во-вторых, из общего количества таких элементарных вероятностей следует отобрать половину дающих ненулевые произведения одного знака аналогично (92), (117), (120), (131). При заданном расположении нулей общее количество отобранных элементарных вероятностей составит 2^V . Положим их одинаковыми и равными p , остальные — равными нулю.

Вычислим $\langle |A_1 A_2 \dots A_V| \rangle$. Среди V штрихованных значений a'_1, a'_2, \dots, a'_V можно расставить $V - 2$ нуля C_V^{V-2} способами, где $C_V^{V-2} = V!/2!(V-2)!$ — биномиальный коэффициент, значит,

$$\langle |A_1 A_2 \dots A_V| \rangle = \sum (a_1 a'_1 a_2 \dots a_V a'_V) = 2^V p C_V^{V-2}. \quad (135)$$

При построении неравенств Белла типа (56), (86), (127) важно отношение момента $\langle |A_1 A_2 \dots A_V| \rangle$ к моменту $\langle |A_1 A_2 \dots A_{V-1}| \rangle$. Вычислим последний. К числу элементарных вероятностей $2^V C_V^{V-2}$ в этом случае добавляются элементарные вероятности, у которых $a_V = 0$. Таких элементарных вероятностей будет $2^V C_{V-1}^{V-3}$, следовательно,

$$\langle |A_1 A_2 \dots A_{V-1}| \rangle = \langle |A_1 A_2 \dots A_V| \rangle + \sum (a_1 a'_1 a_2 \dots 0 a'_V) = \\ = 2^V p (C_V^{V-2} + C_{V-1}^{V-3}), \quad (136)$$

откуда имеем (91).

7. Заключение

Ответ на вопрос о статусе теории скрытых переменных в качестве возможной интерпретации квантовой теории может дать эксперимент с достаточно эффективными детекторами. Хотя мне не известно о проведении подобных экспериментов, проанализируем последствия опровержения теории скрытых переменных.

Невозможность описания эксперимента в рамках рассмотренных вероятностных моделей означает влияние приемного тракта (т.е. положения переключателя измерения штрихованных либо нештрихованных наблюдаемых) на формирование светового поля. Например, в схемах с двумя наблюдателями вместо единой четырехмерной функции распределения совместных вероятностей $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$ приходится оперировать с четырьмя двумерными распределениями

$$P_{AB}(a, b), P_{A'B}(a', b), P_{AB'}(a, b'), P_{A'B'}(a', b'),$$

не сводимыми к $P_{AA'BB'}(a, a', b, b')$. Таким образом, распределения совместных вероятностей в различных сериях эксперимента оказываются несовместными между собой, несмотря на отсутствие каких-либо изменений в источнике при переключении режимов работы у наблюдателей. Это означает, что формирование квантового поля нельзя разделять на априорную (испускание фотонов) и апостериорную (их детектирование) фазы, что подтверждает вывод работы [34]: "Фотон является фотоном, лишь если это — зарегистрированный фотон". На наглядном языке фотонов — волновых пакетов это, по-видимому, можно интерпретировать так: волновой пуг с энергией кванта возникает между конкретным источником и конкретным поглотителем, но не направляется источником безадресно в окружающее пространство вообще. Как это может быть и не является ли такое предложение абсурдным? Если принять реальность существования вакуумных волн (флуктуаций вакуума) как некоего фона, на котором разворачиваются световые и иные явления (см., например, [38–40]), то следует признать одновременное присутствие встречных бегущих волн ненулевой амплитуды до момента испускания фотона источником. Следовательно, в конечном спектральном диапазоне посредством встречных вакуумных волн, бегущих между приемником и источником, возможна как бы предварительная синхронизация атомов источника и приемника, влияющая на рождение фотона. Такой замкнутый самосогласованный подход, возможно, приведет наконец к разрешению парадоксов Белла и постижению природы фотона.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 96-02-16334а.

Bell's theorem for trichotomic observables

A.V. Belinskii

*M V Lomonosov Moscow State University, Physics Department
Vorob'evy Gory, 119899 Moscow, Russia
Tel. (7-095) 143-48 31*

Bell's paradoxes, due to the fundamental properties of light and the nature of the photon, are discussed within a single framework with a view to checking the hypothesis that a stationary, nonnegative, joint probability distribution function exists. This hypothesis, related to the local theory of hidden parameters as a possible interpretation of quantum theory, enables experimentally verifiable Bell's inequalities to be formulated. The dependence of these inequalities on the number of observers V is considered. Quantum theory predicts Bell's inequalities to break down in optical experiments. It is shown that as V increases, requirements on the quantum effectiveness of the detector, η , are reduced from $\eta > 2/3$ at $V = 2$ to $\eta > 1/2$ for $V \rightarrow \infty$. Examples of joint probability distribution functions are given for illustrative purposes, and a way to resolve the Greenberg–Horne–Zeilinger (GHZ) paradox is suggested.

PACS number: 03.65.Bz

Bibliography — 40 references

Список литературы

1. Татарский В И *УФН* **139** 587 (1983)
2. Клышко Д Н *УФН* **166** 613 (1996)
3. Agarwal G S, Home D, Schleich W *Phys. Lett. A* **170** 359 (1992)
4. Smithey D T et al. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1244 (1993)
5. Einstein A, Podolsky B, Rosen N *Phys. Rev.* **47** 777 (1935); перевод: *УФН* **16** 440 (1936)
6. Bohm D *Quantum Theory* Englewood Cliffs (New York: Prentice-Hall, 1951); перевод: Бом Д *Квантовая теория* (М.: Физматгиз, 1961)
7. Bell J S *Physics* **1** 195 (1964)
8. Белинский А В *Письма в ЖЭТФ* **59** 137 (1994)
9. Белинский А В *УФН* **164** 435 (1994)
10. Klyshko D N *Phys. Lett. A* **218** 119 (1996)
11. Евдокимов Н В и др. *УФН* **166** 91 (1996)
12. Aspect A, Grangier P, Roger G *Phys. Rev. Lett.* **47** 460 (1981); **49** 91 (1982); Aspect A, Dalibar J, Roger G *Phys. Rev. Lett.* **49** 1804 (1982)
13. Clauser J F, Horne M A *Phys. Rev. D* **10** 526 (1974)
14. Shih Y H, Sergienko A V, Rubin M H, Kiess T E, Alley C O *Phys. Rev. A* **50** 23 (1994)
15. Clauser J F et al. *Phys. Rev. Lett.* **23** 880 (1969)
16. Klyshko D N *Phys. Lett. A* **172** 399 (1993)
17. Belinsky A V, Klyshko D N *Phys. Lett. A* **176** 415 (1993)
18. Белинский А В, Клышко Д Н *УФН* **163** (8) 1 (1993)
19. Клышко Д Н *Фотоны и нелинейная оптика* (М.: Наука, 1980)
20. Mermin N D *New Techniques and Ideas in Quantum Measurement Theory* (Ed. D M Greenberger) (New York: Academy of Science, 1986) p. 422
21. Santos E *Phys. Rev. Lett.* **66** 1388 3227 (1991); *Phys. Rev. A* **46** 3646 (1992); *Phys. Lett. A* **212** 10 (1996)
22. Eberhard P H *Phys. Rev. A* **47** 747 (1993)
23. Белинский А В *Письма в ЖЭТФ* **64** 294 (1996)
24. Santos E *Found. Phys.* **21** 221 (1991)
25. Garg A, Mermin N D *Phys. Rev. D* **35** 3831 (1987)
26. Pavičić M *J. Opt. Soc. Am. B* **12** 821 (1995)
27. Pavičić M *Phys. Lett. A* **209** 255 (1995)
28. Clauser J F, Horne M A *Phys. Rev. D* **35** 3831 (1987)
29. Kwiat P G et al. *Phys. Rev. A* **49** 3209 (1994)
30. Elyutin P V, Klyshko D N *Phys. Lett. A* **149** 241 (1990)
31. Shih Y H, Rubin M H *Phys. Lett. A* **182** 16 (1994)
32. Greenberger D M, Horne M A, Zeilinger A *Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe* (Ed. M Kafatos) (Dordrecht, Holland: Kluwer, 1989) p. 69
33. Greenberger D M et al. *Am. J. Phys.* **58** 1131 (1990)
34. Клышко Д Н *УФН* **164** 1187 (1994)
35. Белинский А В *УФН* **164** 231 (1994)
36. Fine A *Phys. Rev. Lett.* **48** 291 (1982)
37. De Muynck W M *Phys. Lett. A* **114** 65 (1986)
38. Boyer T H *Found. Phys.* **19** 349 (1989)
39. Puthoff H E *Phys. Rev. A* **35** 3266 (1987)
40. Puthoff H E *Phys. Rev. A* **40** 4857 (1989)